T a l l i n n a   T e h n i k a ü l i k o o l
F ü ü s i k a i n s t i t u u t

Ülo Uder

F Ü Ü S I K A   I

Loengukonspekt

T a l l i n n   1 9 9 7

Eessõna teisele trükile

Teine trükk erineb esimesest vormistuse poolest. Põhimõttelisi parandusi on vähe.

Ü. Uder

Tallinnas, detsember 1996. a.

Eessõna esimesele trükile

Käesolev kaheosaline füüsikaõpik on koostatud loengumaterjali alusel, mida autor on peaaegu kahe aastakümne jooksul lugenud Tallinna Tehnikaülikooli tehnilise haru esimese kursuse üliõpilastele. Kogu selle aja vältel on pidevalt vähendatud füüsikale ettenähtud loengutundide mahtu, mistõttu on järjest keerulisemaks läinud üliõpilastele soovitatava õpiku leidmine. Olemasolevad õpikud on kirjutatud märksa ulatuslikuma kursuse jaoks ja nendest üksikute osade väljanoppimine ei võimalda anda süstemaatilist ettevalmistust. Siin esitatu peaks moodustama selle minimaalse osa tehnikakõrgkooli füüsikakursusest, mis küllalt seotult, mõttearenduse lünkadeta, esitaks vajalikud algteadmised füüsikalise maailmapildi omandamiseks. See võimaldab ilma raskusteta, iseseisvalt tutvuda muude allikate kaudu kõigi nende küsimustega, mis käesolevast on välja jäänud. Peale erirelatiivsusteooria elementide hõlmab siin esitatu ainult klassikalist füüsikat, vastates tehnikaülikooli kahele esimesele semestrile (32 + 32 loengutundi). Sellele peab järgnema kaasaegse füüsika kursus, mida Tallinna Tehnikaülikoolis loetakse teisel kursusel, kuid see ei ole üliõpilastele kohustuslik. Seda tuleks üliõpilastel siiski valida, et ettevalmistus ei jääks möödunud sajandite tasemele.

Avaldan tänu S. Pikkale, L. Kurikule, V. Siniveele, A. Saugale ja teistele kolleegidele abi eest loengukonspekti ettevalmistamisel ja vormistamisel.

Ü. Uder

Tallinnas, aprill 1993. a.

1. Füüsika aine

Selles punktis tuleb anda vastus küsimusele, mis on füüsika, millega ta tegeleb ja milline on tema seos teiste teaduste ning tehnikaga?

"Füüsika" tuleneb kreekakeelsest sõnast φνσιζ (lad. physis) – loodus. See sõna tähistas antiikteaduses kogu loodusteadust. Hiljem jagunes viimane mitmeks eriharuks: füüsikaks, keemiaks, astronoomiaks, geoloogiaks, bioloogiaks jne. Füüsika uurib kõige elementaarsemaid süsteeme looduses, kõige lihtsamaid *mateeria liikumisvorme* ja nende *vastastikuseid muundumisi*. Sõna "liikumisvorm" tähendab siin mis tahes muutumist, protsessi tegelikkuses. Lihtsamad liikumisvormid on: mehaanilised, soojuslikud, elektromagnetilised jne. Keemia, bioloogia, geoloogia jt. loodusteadused uurivad keerulisemaid süsteeme looduses, kõrgemaid mateeria liikumisvorme. Kuid lihtsamad liikumisvormid esinevad ka kõigis kõrgemates. Näiteks bioloogilised süsteemid võtavad osa mehaanilisest liikumisest, neis toimub soojuslik liikumine jne. Seepärast on lihtsamad liikumisvormid ka kõige üldisemad, mistõttu selle osa jaoks loodusteadusest on jäetud ka kõige üldisem nimi – füüsika. Niisugune üleüldisus, kõikehaaravus tingib füüsika tähtsa koha kõigi teiste loodusteaduste seas. Füüsika on neile mitmeti aluseks. Näiteks keemia puhul seletab ta keemiliste elementide perioodilisuse, aatomitevaheliste jõudude tekkemehhanismi jne. Tänapäevale on iseloomulik füüsika ulatuslik levimine naaberteadustesse, mida põhjustab füüsika katsetehnika areng. On võimalik uurida füüsikaliste meetoditega ka keerulisemate süsteemide kõige lihtsamaid ja põhilisemaid seaduspärasusi. Nii on füüsika muutumas universaalseks loodusõpetuseks, oma nime vääriliseks.

Definitsioonina kirjutame:

füüsika on teadus mateeria kõigi vormide liikumise ja vastastikuse seose kõige üldisematest ja põhilisematest seaduspärasustest.

Kuidas toimub seaduspärasuste avastamine füüsikas? See algab *vaatlustega*, mida tehakse looduslikes tingimustes esinevate või siis kunstlikult esilekutsutud nähtuste – *eksperimentide* kohta. Saadud teadmiste alusel esitatakse esialgsed oletused toimuva tekkemehanismi ja selles valitsevate seoste kohta – luuakse *hüpotees*. See ei ole veel *teaduslik teooria*. Hüpoteesi on tarvis kontrollida, selle kehtivust tõestada. Selleks tuleb korraldada uusi eksperimente uutes tingimustes, uutes olukordades. Ainult need hüpoteesid, mis kannatavad välja igakülgse kontrolli ja ennustavad õigesti ka uusi, varem mittetuntud nähtusi, lähevad tea-dusesse *füüsikalise teooriana*. Teised jäävad kõrvale. Võib osutuda, et mõninga aja möödudes avastatakse uusi fakte, mis ei ole kooskõlas senise teooriaga. Siis tuleb esitada täiuslikum hüpotees ja kontrollida seda igakülgsetes eksperimentides jne. Tihti ei lükka uus teooria vana ümber, vaid näitab, et vana on rakendatav kitsamates tingimustes. Näiteks kehtib Newtoni mehaanika Einsteini relatiivsusteooria järgi täpselt suurte kehade aeglasel liikumisel. Nii ei ole füüsika valmis, muutumatu, vaid areneb pidevalt. Inimene tungib ikka sügavamale ja sügavamale teda ümbritseva maailma saladustesse.

Füüsika areng on tihedalt seotud inimeste praktiliste vajadustega. Näiteks antiikaja mehaanika tekkis seoses tolleaegse ehitus- ja sõjatehnika nõudmistega. Peale aurumasina leiutamist XIX sajandil tekkis vajadus ehitada hästi ökonoomseid soojusmasinaid. Nende ülesannete lahendamisel sündis uus füüsikaharu – soojusõpetus. Füüsika areng on vajalik tehnika probleemide lahendamisel. Tihti paneb see areng isegi aluse tehnika uutele suundadele. Näiteks aatomituuma lõhestusprotsessi avastamine ja uurimine XX sajandil pani aluse tuumaenergeetikale. Tänu tahke keha füüsika edusammudele tekkis mikroelektroonika. Ilma selleta ei oleks olemas tänapäevast mikroprotsessortehnikat, arvutustehnikat jm.

Ja vastupidi – tehnika areng on vajalik füüsika arenguks. Füüsika ja tehnika koostöö muutub aja möödudes ikka tihedamaks ja tihedamaks. Nende kaasaegsed probleemid on lahendatavad ainult selle koostöö tulemusena – teadlaste suurte kollektiivide poolt, mis koondavad endas nii füüsikuid kui ka paljude tehnikaharude esindajaid – insenere. Kaasaegne füüsik peab olema hea insener ja inseneril tuleb hästi tunda füüsikat.

I pt. KLASSIKALISE MEHAANIKA FÜÜSIKALISED ALUSED

2. Mehaanika ja selle jaotus. Klassikaline mehaanika

Eespool kasutasime mõistet liikumisvorm üldises tähenduses. Mõtlesime sellega mateeria igasugust muutumist, mistahes protsessi looduses. Mehaanika uurib kõige lihtsamat liikumisvormi – kehade ümberpaiknemist ruumis. Täpsemalt:

mehaanika on teadus, mis käsitleb kehade paigalseisu ja liikumist neile rakendatud jõudude mõjul.

Lihtne *mehaaniline liikumine* esineb ka kõigis keerulisemates liikumisvormides. Et keerulisemast aru saada, peab kõigepealt selge olema lihtsam nendes. Muidugi ei tähenda see, et keerulisema saab taandada lihtsamale, et näiteks bioloogilisi protsesse saaks mehaanilistega seletada. Mehaanilisi tuleb seal siiski arvestada.

Mehaanika on füüsika haru, mis saavutas kõrge arengutaseme kõige varem (17.-18. sajandil). Tema peamised osad – teoreetiline- ja rakendusmehaanika, elastsete ja voolavate kehade mehaanika – eraldusid füüsikast, muutudes iseseisvateks teadusteks. Füüsikas vaadeldakse nüüd ainult kõige üldisemaid mehaanika printsiipe ja seisukohti, peamiselt neid, mis on vajalikud soojuse, elektromagnetismi, optika, aatomi- ja tuumafüüsika käsitlemisel.

Mehaanika jaotatakse osadeks: *dünaamika, staatika, kinemaatika*. Dünaamikas toimub liikumist tekitavate põhjuste väljaselgitamine, staatika tegeleb kehade tasakaalutingimuste uurimisega ja kinemaatika käsitleb liikumist sõltumatult seda tekitavatest põhjustest.

Kinemaatika loojaks peetakse Galileid (1564-1642). Dünaamika põhiseadused sõnastas Newton (1643-1727). Kepler, Galilei, Huygens jt. suurkujud olid lahendanud küll palju dünaamika eriküsimusi, kuid Newton oli esimene, kes sõnastas dünaamika põhiseadused terviklikul kujul. See pani aluse mehaanika kiirele arengule. Areng seisnes peamiselt mehaanika matemaatiliste meetodite täiustamises ja mehaanika kasutamises üha uuemates valdkondades. Newtoni seaduste füüsikalist sisu see ei muutnud. Mehaanika edusammudest tingitult sai Newtonist niisugune autoriteet, et $\approx$200 aasta vältel ei tekkinud teadlastel mõtteid Newtoni mehaanika võimalikest puudustest. Selline olukord muutus alles 20. sajandil. A. Einsteini (1879-1955) loodud *relatiivsusteooria* näitas, et Newtoni mehaanika ei ole rakendatav ülisuurte kiirustega liikumisel. Mõnevõrra hiljem leiti, et ka üliväikeste osakeste puhul – aatomite, molekulide, elektronide jne. maailmas – see mehaanika ei kehti. Seal on rakendatav nn. *kvantmehaanika*.

Kuid relativistlik ja kvantmehaanika ei lükka Newtoni tõdesid ümber. Nad näitavad, et Newtoni mehaanika on nende üks erijuhtusid. Kui kiirus on väike ja tegemist on suure kehaga, siis relatiivsusteooria või kvantmehaanika annab sama tulemuse nagu Newtoni oma. Kuid Newtoni mehaanika järgi saadakse see märksa lihtsamalt. Seepärast ei ole Newtoni mehaanika kaotanud oma tähtsust. Et eristada Newtoni mehaanikat uuema aja mehaanikast ja rõhutada selle suurt tähtsust nii teaduse ajaloos üldse kui ka tänapäeval, nimetatakse seda mehaanikat *klassikaliseks*. Mõisteid "klassikaline mehaanika" ja "Newtoni mehaanika" kasutataksegi ühes ja samas tähenduses.

3. Klassikalise mehaanika aegruum

Mehaaniliseks liikumiseks nimetatakse keha asendi muutumist ruumis aja jooksul.

See definitsioon näib meile lihtsana, kuid tegelikult sisaldab ta palju keerulist. Kõigepealt selgub siit, et liikumise mõistega on väga lähedalt seotud ruumi ja aja mõisted. Igasugune liikumine toimub ruumis ja ajas. Kuid mis on ruum, mis on aeg?

Missugused on nende omadused? Kuidas määrata keha asendit ruumis? Kuidas mõõta aega? Need on küsimused, millele on püütud leida täpseid vastuseid ammustest aegadest tänapäevani. Aja jooksul on ruumi ja aja mõisted täpsustunud, kuid ka keerulisemaks muutunud. Ilmneb, et nad on niivõrd üldised, et neid ei saagi defineerida. Siiski, on jäänud üks võimalus – kasutada veel üldisemat mõistet "mateeria".

***Aeg ja ruum on mateeria eksisteerimise põhivormid*.**

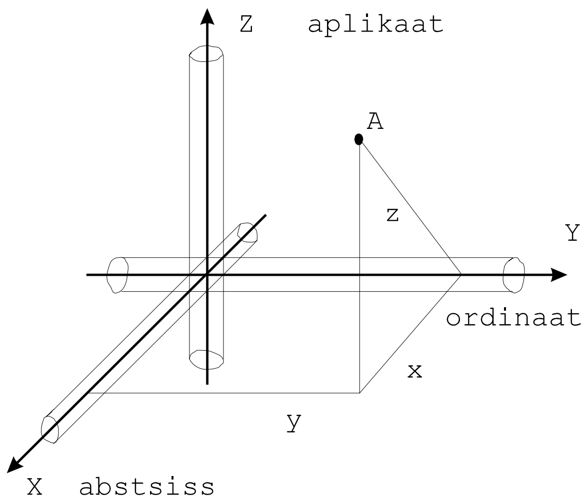
Nende omadustest teame, et ruum on kolmemõõtmeline, aeg – ühemõõtmeline ja ühesuunaline. Keha asukoha määramiseks ruumis on tarvis näidata 3 kaugust mingist kolmest kehast, mis on valitud nn. *taustsüsteemiks*. Selles seisnebki ruumi kolmemõõtmelisus. Samast selgub ka, et asukoht on alati suhteline. Me saame rääkida asukohast ainult kui keha asendist mingite teiste kehade suhtes. Mingit absoluutset asukohta ruumis ei ole. Veel võib rääkida ruumi homogeensusest ja isotroopsusest – tema omadused ei olene asukohast ega liikumissuunast ruumis.

Aeg on samuti suhteline ja homogeenne. Seda arvestatakse mingi ühe sündmuse toimumishetkest alates. Aja ühesuunalisus tuleneb sellest, et kõik nähtused kulgevad ajas selle kasvu suunas. Ajas tagasiliikumist ei esine.

Klassikalises mehaanikas eeldatakse, et aeg ei olene ruumist ega ruum ajast, s.t. aeg ei olene asukohast ja ruum ei muutu ajas. Relatiivsusteooria ütleb, et see on tõepoolest nii, kui vaatleme ruumi ja aega aeglaselt liikuvate kehade puhul. Kiirel liikumisel tekib aja ja ruumi vahel seos. Teisiti öeldes, klassikalises mehaanikas ruumi ja aja omadused ei sõltu kehadest ega nende liikumisest. Peale selle, siin võib kehadevaheline mõju levida lõpmatu suure kiirusega. Relatiivsusteooria piirab seda valguse kiirusega.

***Tingimisi liikumatuid kehi, mille suhtes on otsustatud määrata keha asendit ruumis, nimetatakse taustsüsteemiks*.**

Üheks lihtsamaks taustsüsteemiks on kolm üksteisega risti olevat ja ühes kohas lõikuvat varrast (Joon. 1). Keha A asukoht on määratud, kui on teada selle kaugused



Joon. 1

varrastest või nende poolt määratud tasanditest.

Lihtsustame seda taustsüsteemi nii, et laseme varraste diameetritel kahaneda 0-ni, s.t. asendame need sirgetega. Siis saame idealiseeritud taustsüsteemi, matemaatilise mõiste, mida nimetatakse *koordinaatsüsteemiks*. See on Cartesiuse koordinaadistik [Descartes (1596-1650)]. Kaugusi x, y, z nimetatakse koordinaatideks. Teljed ja vastavad kaugused – koordinaadid kannavad nimetusi abstsiss, ordinaat ja aplikaat.

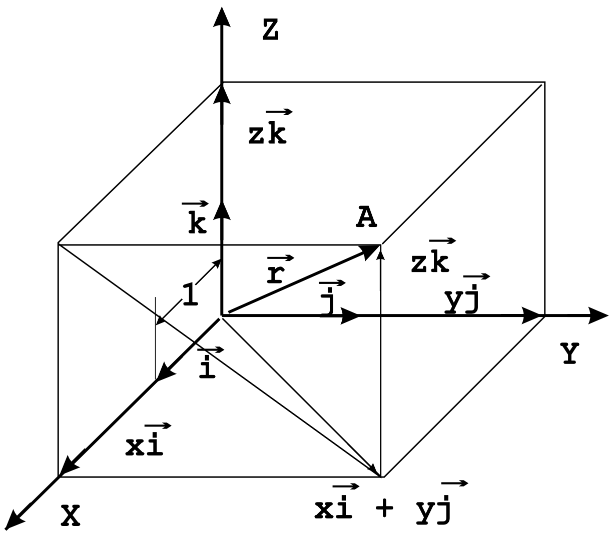
Keha liikumisel koordinaadid muutuvad ajas. Seda tähistatakse nii:

$$\begin{cases} x = f_1(t) = x(t) & ; \\ y = f_2(t) = y(t) & ; \\ z = f_3(t) = z(t) & . \end{cases} \tag{1}$$

Liikumine on antud, kui on teada need funktsioonid (valemid), mis võimaldavad määrata keha koordinaate mis tahes ajahetkel. Selliseid valemeid nimetatakse ka *liikumisseadusteks*. Valem (1) ütleb, et mis tahes kõverjooneline liikumine on lahutatav sirgjoonelisteks, kusjuures viimased on sirgjoonelised liikumise algusest lõpuni.

Avaldistele lihtsama üleskirjutusviisi saamiseks kasutatakse koordinaatide asemel *raadiusvektorit (või kohavektorit)* $\vec{r}$ (Joon. 2). Võtame kasutusele koordinaattelgede suunalised ühikvektorid $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Siis võime kirjutada

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \quad , \qquad (2)$$



Joon. 2

mis on näha jooniselt 2.

Raadiusvektori pikkus, s.o. punkti A kaugus koordinaat-telgede algusest, on arvutatav valemiga

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ . \qquad (3)$$

Raadiusvektori abil on liikumisseadused (1) üles kirjutatavad ühe vektorvalemina:

$$\vec{r} = \vec{f}(t) \ . \qquad (1')$$

Näitena esitame ühtlaselt kiireneva liikumise mööda x telge:

$$\begin{cases} x = v_0\,t + \dfrac{a\,t^2}{2}; \\ y = 0 \ ; \\ z = 0 \ ; \end{cases} \qquad \textit{või} \qquad \vec{r} = \left(v_0\,t + \frac{a\,t^2}{2}\right)\vec{i} \ . \qquad (1'')$$

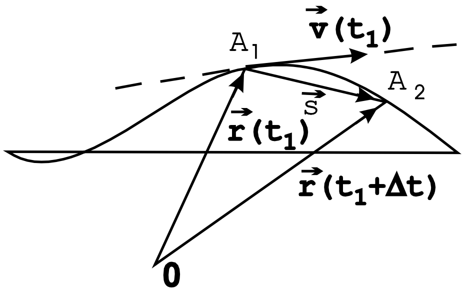
§ 1. Ainepunkti kinemaatika

4. Ainepunkti kiirus

Kõige lihtsamaks mehaaniliseks liikumiseks on *ainepunkti* (mõnikord nim. massipunktiks) liikumine.

Ainepunktiks nimetatakse keha, mille mõõtmed ja kuju võib jätta arvestamata tema liikumise kirjeldamisel.

Kuivõrd selline lihtsustus on õigustatud, see oleneb liikumisülesandest. Ühte ja sama keha võib ühtedes olukordades vaadelda ainepunktina, teistes mitte. Näiteks Maa. Liikumisel ümber Päikese võib teda mõnikord vaadelda ainepunktina, kuid pöörlemisel ümber oma telje mitte. Punkti pöörlemisest ei ole mõtet rääkida.



Joon. 3

Liikugu ainepunkt mööda meelevaldset ruumilist trajektoori (Joon. 3). Punkt 0 olgu koordinaatsüsteemi alguspunkt. Ajahetkel t_1 läbigu ainepunkt punkti A_1 ja väike ajavahemik Δt hiljem, hetkel $t_2=t_1+\Delta t$, punkti A_2. Öeldakse, et ainepunkt on nihkunud punktist A_1 punkti A_2. Vektorit $\vec{s}$, mis viib esimesest punktist teise, nimetatakse *nihkevektoriks*. Punkti A_1 ja A_2 asukohta näitavate raadiusvektorite abil on see arvutatav nii:

$$\vec{s} = \vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1) = \Delta\vec{r}\ .$$

Järelikult,

nihkevektor näitab raadiusvektori muutust ainepunkti liikumisel ühest kohast teise.

Sirgjoonelisel liikumisel nihkevektori suund ühtib liikumise suunaga ja suurus näitab tihti läbitud teepikkust. Kõverjoonelisel see nii ei ole. Läbikäidud teepikkus on punkte A_1 ja A_2 ühendava kaare pikkus. Kui aga vaadeldav ajavahemik Δt on küllalt väike, siis võib kaart pidada kõõluga kokkulangevaks ja nihkevektori pikkus võrdub küllalt täpselt kaarepikkusega, s.t. teepikkusega. Seepärast võib *keskmise kiiruse* kaarel A_1A_2 arvutada nii:

$$\vec{v}_k = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ .$$

Vektori $\vec{v}_k$ suund ühtib nihkevektori $\Delta\vec{r}$ suunaga, sest jagamisel skalaarse suurusega Δt vektori suund ei muutu – $\vec{v}_k$ on $\Delta\vec{r}$-st lihtsalt Δt korda lühem.

Kiiruse punktis A_1 ehk *hetkkiiruse* ajahetkel t_1 saame, kui vähendame ajavahemikku Δt piiramatult ($\Delta t \to 0$):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}\,' \;. \tag{4}$$

Matemaatikas nimetatakse sellist piirväärtuse leidmist tuletise võtmiseks. Punktiga tähistatakse aja järgi võetavat tuletist, ülakomaga tähistamine on üldisem. Seepärast võib öelda, et

kiirus trajektoori mingis punktis on selles punktis võetud raadiusvektori esimene tuletis aja järgi.

Kuidas mõista vektorist tuletise võtmist? See on nagu tuletise võtmine ikka – konstantse vektori tuletis on 0, summa tuletis on võrdne liidetavate tuletiste summaga jne. Raadiusvektor on avaldatav punkti koordinaatide kaudu valemiga (2). Selles on $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ konstantsed vektorid, *x, y* ja *z* aga muutuvad ajas:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \;. \tag{2'}$$

Tuletis tuleb võtta ainult funktsioonidest *x(t), y(t)* ja *z(t)*:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k} \;. \tag{5}$$

Seega on koordinaadi tuletise arvväärtus ühtlasi ka kiirusvektori komponendiks:

$$v_x = \dot{x} \;\; ; \;\; v_y = \dot{y} \;\; ; \;\; v_z = \dot{z} \;\; .$$

Ka siit järeldub, et meelevaldset kõverjoonelist liikumist võib käsitleda kui liitliikumist, mis on saadud kolme koordinaattelje sihis toimuva sirgliikumise liitmise tulemusena, kusjuures liidetavad liikumised (ja kiirused) on üksteisest sõltumatud. Näite (1") puhul kolme liidetava liikumise kiirused avalduvad nii:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_0 + a\,t \;; \\ v_y = 0 \;; \qquad\qquad ehk \quad \vec{v} = (v_0 + a\,t)\,\vec{i} \;, \\ v_z = 0 \end{cases}$$

s.t. kiirus on x-telje sihiline.

Missugune on kiiruse suund üldjuhul, kõverjoonelisel liikumisel (Joon. 3)? $\Delta\vec{r}/\Delta t$ suund ühtis $\Delta\vec{r}$ ehk nihkevektori suunaga. Piirile $\Delta t \to 0$ üle minnes punkt A_2 läheneb punktile A_1. Seejuures nihkevektor (kõõl A_1A_2) läheneb puutujale, mis on tõmmatud trajektoorile punktist A_1. Järelikult läheneb samale puutujale ka kiirus. Nii on hetkkiirus alati trajektoori puutuja suunaline (Joon. 3). Näiteks ringliikumisel on kiirus ringjoone puutuja suunaline.

[Katse sädemete liikumise jälgimiseks käiamisel.]

Väga ilmekas näide on ka auto liikumine kurvis pärast sattumist jäisele teepinnale, millal juhitavus täielikult kaob.

Sirgjoonelisel liikumisel asub kiirusvektor alati sirgel, millel toimub liikumine.

5. Ainepunkti kiirendus

Kiirenduseks nimetatakse kiiruse muutumise kiirust.
Sellisest definitsioonist järgneb, et kiirendus arvutub analoogiliselt kiirusega – tuletise abil. Kiiruse puhul, valemis (4), leidsime tuletise raadiusvektorist aja järgi ja saime raadiusvektori muutumise kiiruse ehk lihtsalt kiiruse. Võttes tuletise kiirusest, saame kiiruse muutumise kiiruse:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \vec{v}^{\,\prime} \;. \tag{6}$$

See ongi kiirendus.

Kuidas arvutuvad kiirenduse komponendid a_x, a_y, a_z ? Need on sirgjooneliste liikumiste kiirendused, milliste summana me kõverjoonelist liikumist käsitlesime. Nagu kiiruse puhulgi, nii arvutatakse needki tuletise abil, seekord kiiruse komponentidest:

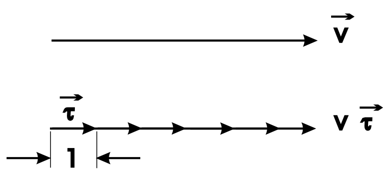
$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \, ; \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \, ; \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \, . \end{cases} \tag{7}$$

Kõverjoonelisel liikumisel jagatakse kiirendus sageli komponentideks teisel viisil. Järgnevalt vaatlemegi seda.

Esmalt kirjutame kiirusvektori üles kahe teguri korrutisena:

$$\vec{v} = v \, \vec{\tau} \, .$$

Esimene tegur võrdugu kiiruse suurusega (mooduliga), teine on siis kiiruse suunaline ühikvektor (Joon. 4). Vektor $\vec{v}$ on asendatud ühikvektorite ($|\vec{\tau}| = 1$) summaga.



Joon. 4

Asetame saadud avaldise valemisse (6). Korrutisest tuletise võtmise reegleid arvestades saame:

$$\vec{a} = \frac{d(v \, \vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} \, .$$

Esimene liidetav on $\vec{\tau}$ suunaline vektor, s.t. kiiruse või trajektoori puutuja suunaline. Seepärast nimetatakse seda *tangentsiaalseks* – puutujasuunaliseks. Tema suurus võrdub tuletisega dv/dt – kiiruse suuruse muutumise kiirusega:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \,. \tag{8}$$

Seega

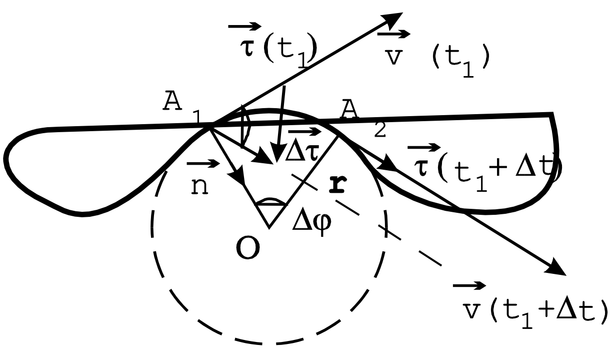
tangentsiaalne kiirenduse komponent näitab, kui kiiresti kiirus muutub suuruse poolest.

Sama tähendus on kiirendusel teatavasti ka sirgjoonelisel liikumisel. Kõverjoonelisel on kiirendusel veel teinegi komponent:

$$v\,\frac{d\vec{\tau}}{dt} \,.$$

Mida see näitab ?

Võtame trajektooril jällegi kaks teineteisele hästi lähedast punkti A_1 ja A_2. Joonise selguse mõttes joonistame need siiski küllalt kaugele teineteisest (Joon. 5). Kui kaar A_1A_2 on küllalt väike, siis võib seda vaadelda osana mingist ringjoonest, s.t. ühel tasapinnal asuvana. Valides sama tasandi meie joonise tasandiks, saame seal ringjoont näidata. Seda ringjoont nimetatakse trajektoori *kõverusringjooneks* piirkonnas A_1A_2. Selle raadiust r nimetatakse trajektoori *kõverusraadiuseks* ja pöördväärtust 1/r – *kõveruseks* antud kohas.



Joon. 5

Ainepunkti liikumisel muutub nii kõverusringjoone keskpunkti O asukoht kui ka raadius r. Samuti muutub kiiruse $\vec{v}$ suurus ja suund. Suuna muutust kirjeldabki ühikvektori $\vec{\tau}$ tuletis $d\vec{\tau}\ /\ dt$. Seda hakkame nüüd leidma.

$\vec{\tau}$ vektor on kaarel A_1A_2 liikudes pöördunud nurga $\Delta\varphi$ võrra. Vektori muutuse tähistame $\Delta\vec{\tau}$. Arvestame, et $\Delta t \to 0$. S.t. $\Delta\varphi \to 0$ ja $\Delta\tau \to 0$ ning joonisel kujutatud kaks kolmnurka on võrdhaarsed kolmnurgad kaduvväikese tipunurgaga $\Delta\varphi$. Seepärast võime kolmnurkade aluse ehk tipunurga vastaskülje ja selle nurga vastas seisva kaarepikkuse arvutada ühesuguselt:

$$\Delta\tau = \tau\ \Delta\varphi\ ;$$

$$\overset{\frown}{A_1A_2} = \Delta s = r\ \Delta\varphi\ .$$

Esimene võrdus lihtsustub veelgi $\tau = 1$ tõttu. Vektorina on $\Delta\vec{\tau}$ risti trajektooriga. Tähistades $\vec{n}$-ga trajektooriga ristuva ühikvektori, võime kirjutada:

$$\Delta\vec{\tau} = \Delta\tau\ \vec{n} = \Delta\varphi\ \vec{n}\ .$$

Nurga $\Delta\varphi$ saame avaldada kaarepikkuse Δs kaudu:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}\ .$$

Nende võrduste abil leiamegi tuletise $d\vec{\tau}\ /\ dt$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s\ \vec{n}}{r\ \Delta t} = \frac{\vec{n}}{r}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\vec{n}}{r}\ v\ ,$$

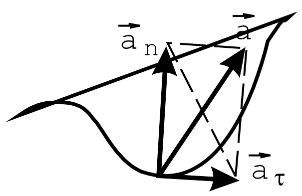
sest viimane piirväärtus annab kiiruse suuruse v. Saadud tulemus, korrutatuna veel kord kiirusega v, annabki kiirenduse teise komponendi. Et see on risti trajektooriga, siis nimetatakse komponenti normaalseks. Ristiolekut trajektooriga näitab ühikvektor $\vec{n}$. Seega *normaalkiirenduse* suurus arvutub

$$a_n = \frac{v^2}{r}\ . \qquad (9)$$

Normaalkiirendus kirjeldab kiiruse suuna muutumise kiirust.

Nii võime lõpuks kiirenduse jaoks kirjutada:

$$\vec{a} = a_\tau\ \vec{\tau} + a_n\ \vec{n} = \frac{dv}{dt}\ \vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\ \vec{n}\ . \qquad (10)$$



Joon. 6

Joonisel 6 näitame saadud vektorite asetust trajektoori suhtes. Näitena võib tuua sõidu autoga. Auto esirattad, kui need ei ole vedavad ega pidurda, annavad autole normaalkiirenduse (muudavad kiiruse suunda), vedavad tagarattad aga – tangentsiaalse kiirenduse (muudavad kiiruse suurust).

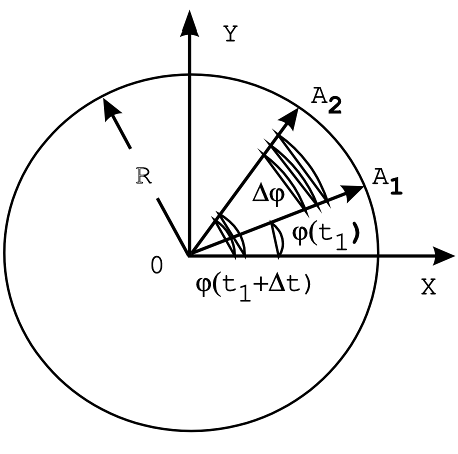
6. Ringliikumine. Nurkkiirus ja -kiirendus

Kõige lihtsamaks kõverjooneliseks liikumiseks on *ringliikumine*. See on liikumine, mille trajektoor on ringjoon. Sel juhul trajektoori kõverusraadius ei muutu ajas. Konstantse kõverusraadiuse tähistame tähega *R*. Normaalkiirendus avaldub siis

$$a_n = \frac{v^2}{R} \,. \qquad (9')$$

Ringliikumisel nimetatakse seda tavaliselt *kesktõmbekiirenduseks*, sest ta on alati suunatud ringi keskpunkti.

Ringjoonelistest on kõige lihtsam *ühtlane ringliikumine*. Selle puhul $a_\tau = 0$. Kiirus ei muutu suuruse poolest, suund aga muutub. Seepärast $a_n \neq 0$. Normaalkiirendus saab võrduda nulliga üksnes sirgjoonelisel liikumisel.



Joon. 7

Punkti asukohta ringjoonel võib määrata ka nurgaga (Joon. 7). Kui koordinaatide alguspunkt 0 on võetud ringi tsentrisse, siis raadiusvektor muutub ainult suuna poolest. Olgu see aja Δt jooksul pöördunud nurga Δφ võrra. Ajaühikus sooritatud pöördenurk on siis $\Delta\varphi / \Delta t$. Seda nimetatakse *keskmiseks nurkkiiruseks* ajavahemikul Δt või kaarel A_1A_2. Vähendame ajavahemikku piiramatult:

See annab nurkkiiruse punktis A_1 või ajahetkel t_1, s.t. *hetknurkkiiruse.*

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \varphi' . \qquad (11)$$

Leiame seose kiirusega v, mida nurkkiiruse kasutamisel nimetatakse *lineaar-* ehk *joonkiiruseks*. Selleks avaldame kesknurga $\Delta\varphi$ kaarepikkuse $\Delta s = \overset{\frown}{A_1A_2}$ kaudu:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}$$

ja asetame valemisse (11):

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{R\ \Delta t} = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R} .$$

Seega

$$v = \omega\ R . \qquad (12)$$

Joonkiirus näitab ajaühikus läbitavat kaarepikkust, nurkkiirus – ajaühikus raadiuse poolt moodustatud pöördenurka. Seepärast ongi nendevaheline seos täpselt samasugune nagu kaarepikkuse ja sellele vastava kesknurga vahel: $\Delta s = \Delta\varphi \cdot R$. Seda võrdust ajaga jagades saamegi ühel pool võrdusmärki joonkiiruse ja teisel pool R kordajana nurkkiiruse ω .

Valem (12) kehtib ka meelevaldsel kõverjoonelisel liikumisel, ainult R tuleb asendada muutuva kõverusraadiusega r.

Valemi (12) abil võib normaalkiirenduse avaldada nurkkiiruse kaudu:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2\ R . \qquad (13)$$

Tangentsiaalse kiirenduse jaoks leiame

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\ \frac{d\omega}{dt} .$$

Saadud nurkkiiruse tuletist aja järgi nimetatakse *nurkkiirenduseks*. Tähistame selle ε-ga. Siis

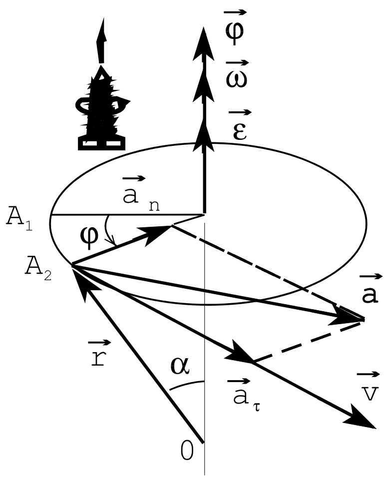
$$a_\tau = \varepsilon R . \quad (14)$$

Saime (12)-ga täiesti analoogilise seose. Seepärast nimetatakse a_τ tihti *joon-kiirenduseks*.

Ühtlase ringliikumise puhul, kui $a_\tau = 0$, on ka $\varepsilon = 0$.

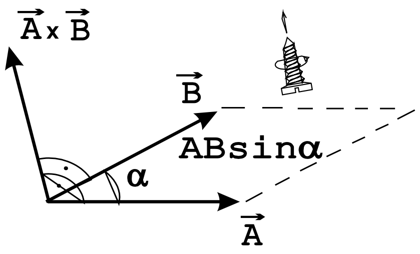
7. Pöörlemist kirjeldavate suuruste vektoriseloom

Kiiruse ($\vec{v}$), kiirenduse ($\vec{a}$), tangentsiaal- ($\vec{a}_\tau$) ja normaalkiirenduse ($\vec{a}_n$) vektoriaalsuses oleme juba veendunud. Osutub, et ka nurk (φ), nurkkiirus (ω) ja -kiirendus (ε) on vektor. See selgub asjaolust, et pöördenurga arvväärtus üksinda ei anna meile täit ettekujutust pöördest. Keha võib pöörduda ümber mitmesuguse telje. Seepärast on tarvis näidata ka telje asendit ruumis, mille ümber toimub pöörlemine. Telje üks suundadest omistataksegi nurgavektorile $\vec{\varphi}$ (Joon. 8). Valitakse see *kruvireegli* järgi.



Joon. 8

Kui pöördenurk on vektor, siis sellest võetud tuletis aja järgi [vt. valem (11)], s.t. nurkkiirus $\vec{\omega}$ on samuti vektor. Analoogiliselt leiame, et ka nurkkiirendus ε on vektor. $\vec{\omega}$ on alati nurgavektoriga samasihiline, kuid $\vec{\varepsilon}$ ei lange üldiselt kokku pöörlemisteljega. Teljesihiline on see ainult fikseeri tud telje puhul. Näiteks siis, kui pöörleva keha telg on asetatud laagritesse. Sel juhul on $\vec{\varepsilon}$ nurkkiirusvektori $\vec{\omega}$ suunaline kiireneva ja vastassuunaline aeglustuva pöörlemise puhul. Joonisel 8 kujutatakse kiirenevat



Joon. 9

pöörlemist. $\vec{a}_\tau$ on kiiruse $\vec{v}$ ja $\vec{\varepsilon}$ - nurkkiiruse $\vec{\omega}$ suunaline. Pöörlemistelje asendi muutumisel võib $\vec{\varepsilon}$ omada kõikvõimalikke teisi asendeid $\vec{\omega}$ suhtes. Sel juhul nurkkiirendus näitab nii $\vec{\omega}$ suuruse kui ka suuna muutumise kiirust.

Seoses vaadeldud suuruste vektor-iseloomuga tekib küsimus, kas valemeid (12) - (14) saab kirjutada ka vektorkujul? Vastus on jaatav, kui me kasutame matemaatilist tehet *vektorkorrutis*: $\vec{A}$ x $\vec{B}$. See on vektor, mis asub risti nii $\vec{A}$- kui ka $\vec{B}$-vektoriga ja omab suurust ABsinα (Joon. 9). Korrutise suund määratakse kruvireegli abil (esimest vektorit teisele üle väiksema nurga pöörates).

Võtame koordinaattelgede alguspunkti 0 pöörlemisteljele joonisel 8. Pöörleva punkti asukohta näidaku raadiusvektor $\vec{r}$. Selle abil saabki valemi (12) üles kirjutada vektorkujul:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} , \qquad (12')$$

sest $\vec{v}$ on tõepoolest risti nii $\vec{\omega}$ kui ka $\vec{r}$-ga (Joon. 8) ja selle suuruse jaoks saab vektorkorrutise reeglite järgi leida valemi (12):

$$v = \omega r \sin\alpha = \omega R .$$

Analoogiliselt võib üles kirjutada ka valemid (13) ja (14):

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) ; \qquad (13')$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} . \qquad (14')$$

Tuleb rõhutada, et tegurite järjekord on siin tähtis!

8. **Tahke keha kulgev ja pöörlev liikumine**

Liikumisülesannetes käsitletakse tahket keha tavaliselt ainepunktidest koosnevana, kusjuures nende vahekaugused on muutumatud (nn. *jäiga kehana*). Sel juhul võib keha meelevaldse liikumise lahutada kaheks lihtsamaks liikumiseks, mis toimuvad teineteisest sõltumatult. Need on *kulg- ja pöördliikumine*.

***Kulgliikumisel ehk translatoorsel liikumisel kõik ainepunkte ühendavad mõttelised sirged jäävad kogu liikumise kestel iseenesega paralleelseks*.**

***Pöördliikumisel kõik ainepunktid moodustavad ringjooni ümber ühise telje, mida nimetatakse pöörlemisteljeks*.**

Võtame ühe näite. Kujutame pliiatsi liikumist nii, et selle kõik punktid moodustaks ringjooni, kuid pliiats jäägu iseenesega kogu liikumise vältel paralleelseks ega pöörelgu ümber oma sümmeetriatelje. Liikumine on translatoorne, mitte pöördliikumine. Kõik punktid moodustavad küll ringjooni, kuid mitte ümber ühise telje.

Kulgliikumisel on keha kõigi punktide trajektoorid ühesugused. Seepärast on ühesugused ka kiirused ja kiirendused. Kogu keha liikumist võib kirjeldada ainult ühe ainepunkti liikumise kirjeldamisega. Tavaliselt võetakse selleks keha *massikese*. Massikeskme asukoha arvutusvalemi leiame hiljem.

Pöördliikumisel ei ole kõigi punktide trajektoorid ühesugused. Need on küll ringjooned, kuid raadiused on ringjoontel erinevad. Seepärast on erinevad ka joonkiirused ja -kiirendused. Ühesugune on nii pöördenurk, nurkkiirus kui ka nurkkiirendus. Seepärast eelistataksegi kehade pöörlemise kirjeldamisel nurksuurusi. Joonsuurused on neist raadiuse abil lihtsalt leitavad [vt.valemit (12), (13) ja (14)]. Nad on võrdelised pöörlemisraadiusega. Teljelähedastel punktidel on joonsuurused väiksed, kaugematel aga suuremad.

§ 2. Ainepunkti ja tahke keha translatoorse liikumise dünaamika

9. Inertsiseadus ja inertsiaalsed taustsüsteemid

Paljud füüsika seadused sõnastatakse ideaalsete objektide või ideaalsete protsesside jaoks. Nii on ka *Newtoni I* ehk *inertsiseadusega*. Siin vaadeldakse ideaalset liikumist, sellist, mis on vaba igasugustest takistustest, mõjutustest. Esi-mesena tõi füüsikasse kujutluse niisugusest liikumisest Galilei. Tema arvates pidi keha sel juhul liikuma *igavesti ja jääva kiirusega*. Descartes lisas sellele mõtte, et vaba keha jätkab oma liikumist *sirgjooneliselt*. Newton võttis need järeldused kokku üheks dünaamika põhiseaduseks.

***Iga keha püsib paigal või liigub ühtlaselt sirgjooneliselt seni, kuni teiste kehade mõju ei muuda sellist liikumisolekut*.**

Seejuures Newton rõhutas, et ühtlase sirgjoonelise liikumise olek ei ole mitte ainult teiste kehade mõju puudumise tulemus, vaid kui igale kehale omane visa püüd säilitada sellist liikumise olekut. Kui seda mitte arvestada, siis võib näiteks arvata, et vaba keha lihtsalt "hõljub ruumis", korrapäratult ja sihitult oma asendit muutes. Kuid see ei ole nii. Vaba keha käitub täpselt Newtoni I seaduse kohaselt. Veel enam, kui teised kehad püüavad sellist olekut muuta, siis ta avaldab vastupanu – püüab takistada teisi kehi oma liikumisolekut muutmast. Sellist

***kõigi kehade visa püüdu säilitada paigalseisu või ühtlase sirgjoonelise liikumise olekut nimetatakse inertsiks*.**

Sõna tuleneb vastavast ladinakeelsest sõnast (inertsia), mis tähendab loidust, raskesti liikumapandavust. Füüsikalist suurust, millega mõõdetakse kehade inertsust, nimetatakse *massiks*. Tavaliselt tähistatakse tähega m.

Inertsiseaduses räägitakse paigalseisust ja liikumisest. Kuid need mõisted ei ole absoluutsed. Keha on paigal või liigub mingi taustsüsteemi suhtes. Seepärast tekib küsimus, kas see seadus kehtib igasuguses taustsüsteemis? Kas näiteks kiirendusega liikuvas trollibussis kehtib inertsiseadus? Ilmselt ei. Sest kui seal ei mõju meile mingeid jõudusid, s.t. me ei toetu istepingile või ei hoia kinni käepidemest, siis me ei seisa paigal ega liigu ka ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Liigume kiirendusega, vastupidises suunas trollibussi kiirendusega. S.t. niisuguses süsteemis on jõu rakendamine vajalik keha paigalpüsimiseks.

Teisiti on olukord siis, kui taustsüsteem ise liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, s.t. on välismõjudest vaba. Näiteks ühtlaselt liikuva laeva kajutis me ei märka kõrvalekaldumisi inertsiseadusest.

Materiaalset taustsüsteemi, milles inertsiseadus kehtib täiesti täpselt, nimetatakse inertsiaalseks taustsüsteemiks.

Inertsiseaduse kontroll võimaldabki kindlaks teha, kas taustsüsteem liigub ühtlaselt sirgjooneliselt või mitte. Kui see liigub kiirendusega, siis ka kõik vabad kehad liiguvad selles kiirendusega, ainult süsteemi kiirendusele vastupidisega. Nad säilitavad ühtlast sirgjoonelist liikumist, mistõttu taustsüsteemi suhtes näivad liikuvat kiirendusega. Meile tundub, et kehale mõjub jõud, sest kogemus ütleb: ainult jõu mõjul toimub kiirendusega liikumine. Sellist jõudu nimetatakse *inertsijõuks*.

Vabale kehale mõjuv inertsijõud ei ole reaalne jõud. Selle väite heaks tõestuseks on asjaolu, et inertsijõud ei põhjusta vaba keha deformeerumist. Näiteks kui samas kiirendusega liikuvas trollibussis liigub vaba pall kiirendusega, siis ei ole see deformeerunud. Alles põrkumisel mingi kehaga hakkab pallile mõjuma reaalne jõud, mis sunnib palli muutma ühtlast sirgjoonelist liikumist inertsiaalse taustsüsteemi suhtes. Kuid see jõud ei ole inertsijõud. Inertsijõud on jõud, millega pall mõjutab teisi kehi, mis ei võimalda sellel jätkata endist liikumist. Nüüd ei ole pall vaba.

Absoluutselt inertsiaalseid taustsüsteeme looduses ei esine. Tavaliselt loetakse inertsiaalseks Maaga seotud süsteemi. Maa pöörlemisest tekkiv kiirendus–kesktõmbekiirendus on Maa suure raadiuse tõttu väike, mistõttu ei avaldu praktilistel juhtudel, täppismõõtmistel aga küll. Täpsemalt inertsiaalne on Päikesega seotud taustsüsteem, kuid ka see liigub üliväikese kiirendusega galaktikate mõju tulemusena.

Kui üks vajaliku täpsusega inertsiaalne taustsüsteem on leitud, siis on inertsiaalne ka iga teine taustsüsteem, mis liigub esimese suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt, s.t. inertsiaalseid taustsüsteeme saab põhimõtteliselt olla kuitahes palju. Näiteks praktiliselt inertsiaalsed on Maaga ja selle pinnal ühtlaselt liikuva kehaga seotud taustsüsteemid.

10. Liikumishulk, jõud ja impulss. Newtoni II seadus

Inertsiseaduse puhul rääkisime keha liikumisolekust ja selle muutumisest. Millal see olek on hästi püsiv? Katsed ja muu praktika näitab, et keha liikumist on raske muuta, kui keha mass on suur ja see liigub suure kiirusega. Seepärast ongi füüsikas võetud kasutusele liikumisolekut kirjeldav suurus, mis võrdub massi ja kiiruse korrutisega:

$$\vec{L} = m\,\vec{v}\ . \tag{15}$$

Seda nimetatakse *liikumishulgaks*. $\vec{L}$ on kiiruse suunaline vektor, sest kiirus on korrutatud skalaarse suurusega – massiga.

Keha liikumishulk muutub ainult teiste kehade mõjul (vt. Newtoni I seadust). Mõju iseloomustamiseks võetakse kasutusele suurus, mida nimetatakse *jõuks*.

***Jõud on füüsikaline suurus, millega mõõdetakse ühe keha mõju teisele, mille tulemusena muutub nende liikumishulk*.**

Jõud on seda suurem, mida kiiremini see liikumishulka muudab. Seepärast võibki jõu avaldada liikumishulga tuletisena:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}\ . \tag{16}$$

***Jõud on võrdeline ajaühikus toimuva liikumishulga muutusega*.**

Sisuliselt on see *Newtoni II seadus*, sest valemi (15) abil võime kirjutada (kui keha mass on konstantne):

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}\ .$$

Tihti kirjutataksegi Newtoni II seadus kujul

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}\,dt\ . \qquad (16')$$

Vasakpoolne avaldis on *liikumishulga muutus*, parempoolne – jõu ja selle mõjumisaja korrutis. Viimast nimetatakse *jõuimpulsiks* või lihtsalt *impulsiks*. Seepärast sõnastatakse Newtoni II seadus järgmiselt (umbes nii sõnastas selle ka Newton).

Liikumishulga muutus on võrdeline jõuimpulsiga ja toimub jõu mõjumise suunas.

See ehk (16') on üldisem kui $\vec{F} = m\,\vec{a}$, sest kehtib ka muutuva massiga kehade liikumisel. (16') nimetatakse ka *liikumishulga muutumise seaduseks*.

Et liikumishulk $m\vec{v}$ on sedavõrd otseselt seotud jõuimpulsiga (ühe muutus on võrdne teisega), siis sageli nimetatakse ka $m\vec{v}$ impulsiks.

11. Ainepunktide süsteemi dünaamika. Newtoni III seadus

Reaalse keha või kehade süsteemi liikumise kirjeldamisel on mõnikord kasulik vaadelda seda ainepunktidest koosnevana. Ainepunktide vahel mõjuvad jõud. Süsteemi võidakse mõjutada ka väljastpoolt (näiteks gravitatsioonijõuga). Seepärast jaotatakse ainepunktidele mõjuvad jõud kaheks – *sise- ja välisjõududeks*. Sisejõud mõjuvad süsteemi või keha osade (ainepunktide) vahel, välisjõud – antud süsteemi osade ja sellest väljaspool asuvate kehade vahel.

Nagu koolifüüsikast teada, kehade mõju on alati vastastikune. Seda väljendab *Newtoni III seadus*.

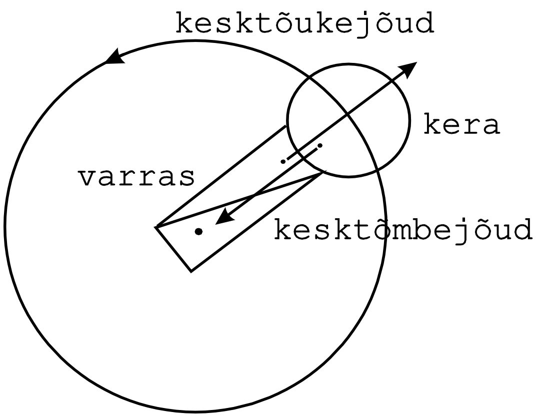
Mõjule on alati olemas võrdne ja vastassuunaline vastumõju.

Kui üks keha (või ainepunkt) mõjutab teist jõuga $\vec{F}_{21}$ ja teine esimest jõuga $\vec{F}_{12}$, siis

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \ . \tag{17}$$

Kumba neist jõududest nimetada mõjuks, kumba vastumõjuks, ei ole mitte millegagi määratud. Kõrvalseisja, vaatleja seisukohast on see mõnikord võimalik.

Üheks mõju ja vastumõju paari näiteks on *kesktõmbe- ja kesktõukejõud* ringliikumisel (Joon. 10). Kesktõmbejõud (varras) annab kerale kesktõmbe- ehk normaalkiirenduse. Kesktõukejõud on kera vastumõju vardale. Vektorid on joonistatud teineteise suhtes nihutatult, et oleks näha nende rakenduspunktide asukohad.



Joon. 10

Kui summeerida kõik süsteemi osadele mõjuvad sisejõud, saame tulemuseks 0. See on järeldus Newtoni III seadusest – jõud koonduvad summas paarikaupa välja.

Vaatleme N ainepunktist koos-nevat süsteemi. Olgu

m_i – i-nda ainepunkti mass (i = 1,2,3,...N),

$\vec{v}_i$ – i-nda ainepunkti kiirus,

$\vec{f}_i$ – i-ndale ainepunktile mõjuv jõud (üldjuhul sise- ja välisjõu summa). Siis võime iga ainepunkti kohta kirjutada Newtoni II seaduse:

$$d(m_i\vec{v}_i) = \vec{f}_i dt \ .$$

Summeerime need N võrdust:

$$\sum_{i=1}^{N} d(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i dt$$

ja teisendame:

$$d(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i) = dt \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \ .$$

Saime kaks summat:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad (18)$$

– *süsteemi liikumishulga* ja

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \qquad (19)$$

– süsteemile mõjuva *välisjõudude resultandi*, sest nagu äsja sai öeldud – sisejõud koonduvad summas välja. Seega

$$d\vec{L} = \vec{F} dt \ .$$

Näitame, et süsteemi liikumishulga $\vec{L}$ võime omistada ühele punktile süsteemis, kui samasse punkti koondada kogu süsteemi mass M, mis on ainepunktide masside summa

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \ :$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = M \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}\right) \ .$$

Tähistame sulgudes oleva avaldise $\vec{r}_M$-ga:

$$\vec{r}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \ . \qquad (20)$$

Siis saame

$$\vec{L} = M\frac{d\vec{r}_M}{dt} = M\,\vec{v}_M\ .$$

Nii ongi süsteemi liikumishulk omistatud punktile massiga M, mille asukohta näitab raadiusvektor $\vec{r}_M$ ja liikumiskiiruseks on $\vec{v}_M$, raadiusvektori tuletis aja järgi. Seda punkti nimetatakse süsteemi *massikeskmeks* või *inertsikeskmeks*. Seega valem (20) on massikeskme raadiusvektori arvutusvalem.

Kõigi ettevõetud tähistuste tõttu võtab algselt kirjutatud summade võrdsus kuju:

$$d(M\vec{v}_M) = \vec{F}\ dt \qquad (21)$$

– süsteemi massikeskme jaoks kehtib täpselt sama Newtoni II seadus, mis ühe ainepunkti puhul. Seda nimetatakse ka *süsteemi massikeskme liikumise seaduseks*. (21)-st järgneb veel, et kogu süsteemile rakendatud jõudude summa, resultantjõu $\vec{F}$, võime samuti rakendada massikeskmele.