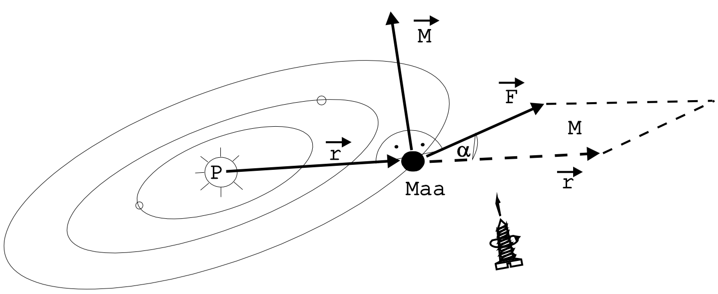
§ 3. Pöördliikumise dünaamika

22. Jõumoment ja impulsimoment

Rakendame pöörlevale kehale mingi jõu. Millest selle mõju võiks oleneda? Mõju tulemuseks on tekkiv kiirendus. Katsetused näitavad, et see ei olene ainult jõu suurusest. Ka jõu rakenduspunkti asukoht ja jõu suund on tähtis. Näiteks ei kinnitata ukselinki (käepidet) ukse hingede lähedale, vaid ikka võimalikult kaugele. Samuti ei püüta ust avada uksega paralleelse jõu abil, vaid ristuvaga. Sest nii on ust kergem avada, seda liikuma panna. Järelikult ei piisa pöörlevale kehale avaldatava mõju kirjeldamisel ainult jõu mõistest. Tuleb kasutada nn. *jõumomenti*.

Jõumomente on kaks. Üks on *jõumoment punkti suhtes*. Näiteks koordinaatide alguspunkti suhtes.

Vaatleme näitena päikesesüsteemi (Joon. 20). Koordinaatide alguspunkti võib valida meelevaldselt. Võtame selle Päikese keskpunkti. Maa asukohta näitab siis raadiusvektor $\vec{r}$.



Joon. 20

Maale mõjugu jõud, näiteks Linnutee gravitatsioonijõud $\vec{F}$. Jõumoment punkti P suhtes defineeritakse siis järgmise vektorkorrutise abil:

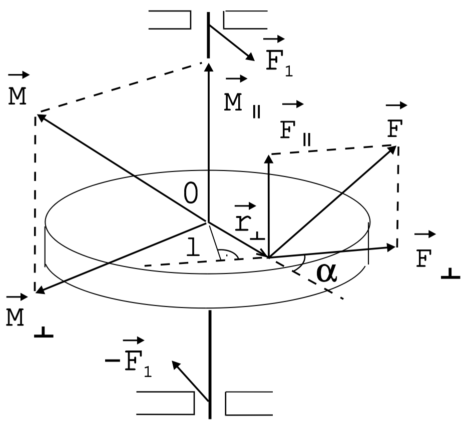
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \ . \tag{34}$$

$\vec{M}$ on vektor pikkusega

$$M = rF \sin \alpha \ , \tag{34'}$$

mis asub risti $\vec{r}$ ja $\vec{F}$ poolt määratud tasandiga (Joon. 20).

Mõjugu süsteemile mitu jõudu erinevates punktides. Siis mõjub süsteemile ka mitu jõumomenti. Nende mõju võib mõnikord asendada ühe jõumomendi omaga. Seda nimetatakse *jõumomentide liitmiseks*. Sel juhul määratakse süsteemile mõjuvate jõudude momendid ja liidetakse need vektoriaalselt. Kõik jõumomendid peavad olema määratud ühe ja sama punkti suhtes, muidu ei ole liitmine põhjendatud.



Joon. 21

Praktikas esineb tihti olukordi, kus pöörlev kehade süsteem ei ole vaba, vaid omab mingit fikseeritud telge, mille ümber toimub pöörlemine (Joon. 21). Siis võetakse jõumomendi defineerimiseks kasutatav punkt pöörlemisteljele ja nii, et jõu rakenduspunkti raadiusvektor ($\vec{r}_{\perp}$) oleks teljega risti. Samasse punkti 0 joonistame ka momendi $\vec{M}$, mis on risti nii $\vec{r}_{\perp}$ – kui ka $\vec{F}$ – vektoriga.

Lahutame jõu $\vec{F}$ kaheks komponendiks $\vec{F}_{||}$ ja $\vec{F}_{\perp}$. Esimese võtame paralleelse pöörlemisteljega, teise sellega risti. Sama teeme jõumomendiga. $\vec{M}_{||}$ on pöörlemisteljega paralleelne ja $\vec{M}_{\perp}$ sellega risti. Siis esineb järgmine vastavus: $\vec{M}_{\perp}$ on tekitatud jõu $\vec{F}_{||}$ poolt ja $\vec{M}_{||}$ jõu $\vec{F}_{\perp}$ poolt. Momendi $\vec{M}_{\perp}$ või jõu $\vec{F}_{||}$ mõju kompenseeritakse laagrite poolt avaldatava vastureaktsiooniga $\vec{F}_1$. Seepärast võib fikseeritud telge omava keha pöörlemise kirjeldamisel jätta teljega paralleelsed jõud vaatlusest välja ja öelda, et mõjuvate *jõudude moment pöörlemistelje suhtes* on pöörlemisteljega paralleelne. Selline jõumoment defineeritakse vektorite $\vec{r}_\perp$ ja $\vec{F}_\perp$ abil:

$$\vec{M}_{||} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp \; ; \tag{35}$$

$$M_{||} = r_\perp F_\perp \sin\alpha = lF_\perp \; .$$

Lõiku $l = r_\perp \sin\alpha$ nimetatakse *jõu* $\vec{F}$ (või $\vec{F}_\perp$) *õlaks*. See on

jõu mõjumissirge kaugus pöörlemisteljest (Joon. 21).

Seega pöörlemistelge omavale kehale rakendatud jõu mõju oleneb selle ristkomponendi suurusest ja jõu õlast.

Kehale mõjuva mitme jõu puhul, mis võivad mõjuda ka erinevates punktides, saab nende momente asendada ühega. Selleks tuleb kõigi jõudude momendid arvutada ühe ja sama telje suhtes ning tulemused liita vektoriaalselt. Summaarse momendi mõju asendab kõigi teiste mõjusid koosvõetuna.

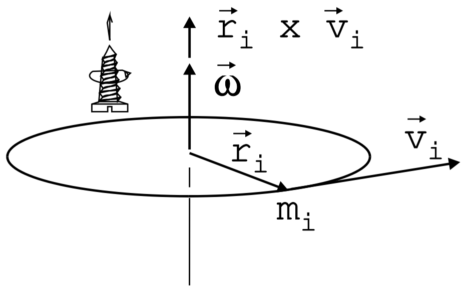
Analoogiline on olukord impulsiga pöörleval liikumisel. Impulss ei kirjelda liikumishulka (pöörlemishulka) õigesti. Seda teeb *impulsimoment*:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \; . \tag{36}$$

See on *impulsimoment punkti suhtes*. Fikseeritud telge omava kehadesüsteemi korral võetakse $\vec{r}$ asemel $\vec{r}_\perp$ ja siis on $\vec{N}$ suund kokkulangev pöörlemistelje omaga. Kiirus $\vec{v}$ on juba iseenesest risti teljega, mistõttu selle ristkomponenti ei ole tarvis arvutada. Sel juhul annab valem (36) *impulsimomendi telje suhtes*.

23. Inertsimoment

Valemi (36) järgi saab impulsimomenti arvutada ainult ainepunkti jaoks. Suuremate mõõtmetega keha puhul see ei kõlba, sest selle igal punktil on oma raadiusvektor $\vec{r}_\perp$ ja kiirus $\vec{v}_\perp$. Ei ole teada, millist väärtust võib valemis kasutada. Sel juhul jaotatakse keha ainepunktideks, arvutatakse iga ainepunkti impulsimoment valemi (36) järgi ja leitakse nende summa. Tulemus on *keha impulsimoment*:



Joon. 22

$$\vec{N}_{||} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{r}_{i\perp} \times m_i \vec{v}_i \ .$$

Tahke keha korral saame valemile anda lihtsama kuju, sest $\vec{v}_i$ on risti $\vec{r}_{i\perp}$-ga, mistõttu nende korrutisel on pöörlemistelje suund (Joon. 22). Pöörlemistelje suunaline on ka nurkkiiruse vektor $\vec{\omega}$ ja see on kõigi ainepunktide jaoks ühesugune. Seepärast võib $\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i$ arvutada järgmiselt. Algul leiame mooduli:

$$|\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i| = r_{i\perp} v_i \sin 90° = r_{i\perp} v_i = r_{i\perp}^2 \omega \ .$$

Kasutasime valemit (12). ω indeksit i ei vaja, sest tahke keha korral on selle kõigil punktidel sama nurkkiirus. Seega võib kirjutada

$$\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i = r_{i\perp}^2 \vec{\omega} \ ,$$

mistõttu kogu keha impulsimomendi jaoks saame avaldise

$$\vec{N}_{||} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_{i\perp}^2 \ .$$

Summa märgi taha jäänud avaldis kannab *ainepunkti inertsimomendi* nime.

Ainepunkti inertsimoment on tema massi ja pöörlemisraadiuse ruudu korrutis.

Paneme tähele seda, et kui teiste momentide (jõu- ja impulsimomendi) puhul korrutati vastavat suurust raadiusvektoriga, siis siin tehakse seda pöörlemisraadiuse ruuduga.

Keha kõigi ainepunktide inertsimomentide summa kannab *keha inertsimomendi* nime:

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_{i\perp}^2 \ . \tag{37}$$

Keha impulsimoment avaldub siis

$$\vec{N}_{||} = I\,\vec{\omega} \ . \tag{38}$$

Meenutame, et translatoorset liikumist iseloomustav suurus – impulss – arvutati $\vec{L} = m\vec{v}$. Seega on pöörleva liikumise valem kujult sama. Kiiruse asemele on tulnud temaga analoogiline suurus $\vec{\omega}$ ja mass on asendunud inertsimomendiga I.

Inertsimoment iseloomustab keha inertsust pöörleval liikumisel. Teeme katse, mis demonstreerib, et pöörlemisel inerts ei olene ainult keha massist, vaid ka selle asetusest pöörlemistelje suhtes. Veeretame mööda kaldpinda alla kaks võrdse massi ja raadiusega silindrit. Üks olgu täissilinder (alumiiniumist), teine õõnes (vasest). Täissilinder jõuab alla varem, sest selle massil on keskmiselt võttes väiksem pöörlemisraadius, seega ka väiksem inerts.

[Katse silindritega kaldpinnal.]

Inertsimoment oleneb pöörlemistelje asendist keha suhtes. Ta ei ole keha jaoks konstantne suurus.

24. Pöördliikumise dünaamika põhiseadus

See on Newtoni II seadusega analoogiline seadus pöördliikumisel. Selle saamiseks lähtumegi Newtoni seadusest kujul (16). i-nda ainepunkti jaoks kirjutatuna saame:

$$\vec{F}_i = \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} .$$

Millega võrduks paremal pool võrdusmärki olev tuletis, kui seal asendada liikumishulk impulsimomendiga?

$$\frac{d\vec{N}_i}{dt} = \frac{d(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i .$$

Et $\vec{r}_i$ on pöörleva punkti raadiusvektor, siis selle tuletis on ainepunkti kiirus $\vec{v}_i$. Esimene vektorkorrutis võrdub nulliga, sest paralleelsete vektorite vektorkorrutis on alati 0 (sin 0° = 0). Teine annab korrutise $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$, mis on jõumoment. Järelikult

$$\vec{M}_i = \frac{d\vec{N}_i}{dt} .$$

Summeerides üle kõigi ainepunktide süsteemis, saame paremal, tuletise märgi all, keha kogu impulsimomendi $\vec{N} = I\,\vec{\omega}$ ja vasakul – kehale mõjuvate välisjõudude momendi $\vec{M}$. Sisejõudude momentidele vastavad liikmed koonduvad summas välja Newtoni III seaduse põhjal.

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} . \qquad (39)$$

Saime täpselt sama kujuga valemi, millest lähtusimegi. Tähistused on ainult teised. Saadu on *pöördliikumise dünaamika põhiseadus*. Tavaliselt kirjutatakse see üles kujul

$$d(I\vec{\omega}) = \vec{M}\ dt\ .$$

Erijuhul, kui pöörleva keha inertsimoment I on ajas muutumatu (konstantne), võib seaduse kirjutada ümber nii:

$$\vec{M} = \frac{d(I\ \vec{\omega})}{dt} = I\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\ \vec{\varepsilon}\ ;$$

$$\vec{M} = I\ \vec{\varepsilon}\ . \tag{39'}$$

Kehale mõjuv jõumoment tekitab nurkkiirenduse, mis on võrdeline jõumomendiga ja pöördvõrdeline keha inertsimomendiga. Mõlemad valemid (39) ja (39') on täiesti analoogilised translatoorse liikumise vastavate valemitega.

Seaduse $d(I\ \vec{\omega}) = \vec{M}\ dt$ toimet illustreerib järgmine katse. Riputame üles ühte teljeotsa pidi horisontaalse teljega ratta ja toetame teist telje otsa ajutiselt käega. Paneme ratta pöörlema ja laseme telje otsa lahti.

[Katse horisontaalse teljega rattaga.]

Ratta raskus $\vec{P}$ tekitab horisontaalse jõumomendi $\vec{M}$. Selle mõjul muutub horisontaalne vektor $I\vec{\omega}$ samuti horisontaalses suunas. Ratta telg hakkab pöörlema horisontaaltasandis ega lange mitte alla.

25. Impulsimomendi jäävuse seadus

See on 4. jäävusseadus klassikalises mehaanikas. Esimesed kolm olid: massi, energia ja liikumishulga e. impulsi jäävuse seadus. Impulsimomendi jäävuse seadus kehtib pöörlevate kehade süsteemis. Kui välisjõudusid ei mõju või nende summaarne moment on 0, siis valemist (39) saame võrduse

$$\frac{d(I\,\vec{\omega})}{dt} = 0 \ .$$

See tähendabki, et impulsimoment ei muutu ajas:

$$I\,\vec{\omega} = \vec{const} \ . \qquad (40)$$

Tavaliselt esitatakse see *impulsimomendi jäävuse seadus* lausega:

suletud kehade süsteemi impulsimoment on jääv.

Et impulsimoment on vektor, siis selle jäävus tähendab kõigi komponentide jäävust eraldi. Võrduse (40) võib asendada kolme skalaarse avaldisega, millest igaüks käsitleb pöörlemist ümber ühe koordinaattelje. Üldjuhul ei pea kõik kolm kehtima samaaegselt. Kui välisjõudude moment ei olegi 0, kuid null on selle mingi üks komponent, siis sama komponendi (telje) sihis kehtib ka impulsimomendi jäävuse seadus. Impulsimomendi teised komponendid võivad muutuda.

[Katse väikese güroskoobiga.]

See säilitab pöörlemistelje (impulsimomendi) suunda ruumis, kui seadme korpusega sooritada erinevaid liigutusi.

Teeme mõningaid järeldusi sellest jäävusseadusest.

1) Kui suletud süsteemi mingid osad panna süsteemisiseste jõudude mõjul pöörlema ühes suunas, siis selleks, et summaarne impulsimoment ei muutuks, peab ülejäänud süsteemi osa hakkama pöörlema vastassuunas. Seda võime jälgida katses pöördpingiga.

[Katse pöördpingil vertikaalse teljega rattaga.]

Pingil istuja paneb pöörlema pingi pöörlemisteljega paralleelse teljega ratta. Istuja koos pingiga hakkab pöörlema vastassuunas. Pöörleva ratta telje vastassuunaliseks seadmisel hakkab ka pink koos sellel istujaga pöörlema vastassuunas.

2) Kui mingisugusel põhjusel muutub süsteemi inertsimoment, siis peab vastupidiselt muutuma (kasvama või kahanema) nurkkiirus (pöörlemiskiirus). Seda kasutavad näiteks iluuisutajad või balletiartistid pirueti sooritamisel. Pirueti sooritaja paneb end pöörlema eemale sirutatud jala ja kätega. Jala ja käte lähendamisel kehale inertsimoment väheneb. Tulemuseks on pöörlemiskiiruse suure-nemine. Käte eemaldamisel kiirus väheneb.

[Katse pöördpingil istuja väljasirutatud kätes hoitavate hantlitega.]

Pingil istuja hoiab väljasirutatud kätes hantleid. Pink pannakse aeglaselt pöörlema. Hantlite lähendamisel kehale pöörlemiskiirus kasvab, nende eemaldamisel väheneb.

26. Pöörleva keha kineetiline energia

Vaatleme pöörlevat keha ainepunktidest koosnevana. Kui mingi i-ndas ainepunkt massiga m_i pöörleb kiirusega v_i mööda ringjoont raadiusega $r_{i\perp}$ (Joon. 22), siis selle kineetiline energia on

$$W_i = \frac{m_i v_i^2}{2} .$$

Kuid $v_i = \omega\ r_{i\perp}$, seepärast

$$W_i = \frac{1}{2}\ m_i \omega^2 r_{i\perp}^2 .$$

Summeerime kõigi ainepunktide energiad. Saame keha kineetilise energia:

$$W_k = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_{i\perp}^2 .$$

Avaldisse jäänud summa ei ole midagi muud kui keha inertsimoment. Seepärast võime lõplikult kirjutada

$$W_k = \frac{I\,\omega^2}{2} . \tag{41}$$

Nagu mitmel muul juhul saime jällegi translatoorse liikumise valemiga täiesti analoogilise valemi ($mv^2/2$). Nii on kõigi pöördliikumise valemitega.

Keha inertsimomenti ei leita tavaliselt valemi $I = \Sigma m r^2$ järgi, vaid integreerimise teel, sest massi jaotus kehas on pidev. Vastavaid arvutusi käsitletakse teoreetilise mehaanika kursuses, mistõttu siin jätame need tegemata. Kirjutame üles ainult mõningad kineetilise energia arvutamisel vajaminevad tulemused.

1) Pikk peenike varras pöörlemas ümber telje, mis on risti vardaga ja läbib selle otspunkti:

$$I = \frac{1}{3} m\, l^2 .$$

m on varda mass ja *l* selle pikkus.

2) Seesama varras pöörlemas ümber keskpunkti läbiva ja vardaga ristuva telje:

$$I = \frac{1}{12} m\, l^2 .$$

3) Peenike rõngas raadiusega *R* rõnga sümmeetriatelje ümber pöörlemisel:

$$I = m\, R^2 .$$

4) Ketas oma sümmeetriatelje ümber pööreldes (ka silinder, võll):

$$I = \frac{1}{2} m R^2 .$$

5) Kera, tsentrit läbiva telje ümber pööreldes:

$$I = \frac{2}{5} m R^2 .$$

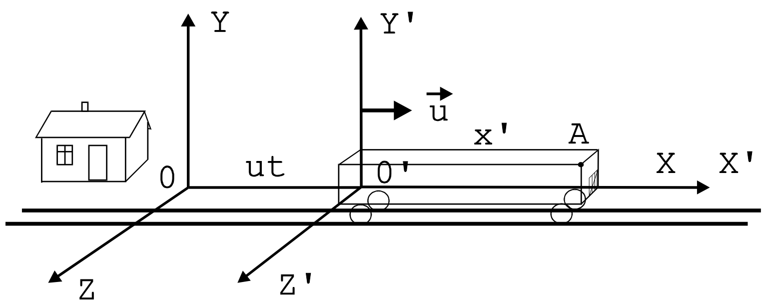
Inertsimoment on avaldatav keha massi ja mingi karakteerse mõõtme ruudu korrutisena, mille juurde kuulub keha geomeetrilisest kujust olenev dimensioonita tegur.

II pt. ERIRELATIIVSUSTEOORIA ELEMENTE

§ 4. Relativistlik kinemaatika

27. Galilei relatiivsusprintsiip

Relatiivsusteooria ajalugu algab Galileist. Temale kuulub esimene *relatiivsusprintsiibi* selge ja järjekindel sõnastus. Vaatleme kahte inertsiaalset taustsüsteemi, millistest üks liigub teise suhtes kiirusega $\vec{u}$. Kummagi süsteemi koordinaatteljestiku võime valida suvaliselt. Kõige lihtsam on, kui võtame mõlemas ühe telje suhtelise kiiruse suunas, teised teljed aga omavahel paralleelsetena. Sellega ei ole tehtud mingeid kitsendusi üldjuhule (Joon. 23).



Joon. 23

0-süsteem on paigal, 0' liigub. Süsteemide materialiseerimiseks võime näiteks süsteemi 0 siduda maapinnaga ja 0' – raudteel ühtlaselt liikuva vaguniga.

Meid huvitagu, kuidas on omavahel seotud mingi ainepunkti A eri süsteemides määratud koordinaadid? Selleks punktiks võib olla näiteks vaguni nurka tähistav punkt. Vaguni pikkus, kõrgus ja laius on siis selle punkti koordinaatideks 0' süsteemis: (x', y', z'). Mingeid põhimõttelisi kitsendusi me ei lisa, kui eeldame 0' ja 0 kokkulangemist aja määramise alghetkel $t = 0$. Joonisel 23 esitatud hetkeks $t \neq 0$

on siis 0' nihkunud 0 suhtes teepikkuse *ut* võrra X telje sihis. Seepärast on ainepunkti A koordinaadid seotud järgmiselt:

$$\begin{cases} x = x' + ut\ ; & & x' = x - ut\ ; \\ y = y'\ ; & \tilde{v}oi & y' = y\ ; \\ z = z' & & z' = z\ . \end{cases} \qquad (42)$$

Neid nimetatakse *Galilei teisendusvalemiteks.*

Nüüd oletame, et ainepunkt A liigub vagunis, s.t. selle koordinaadid x', y' ja z' muutuvad ajas. Kiiruse vagunis saame arvutada valemiga (5):

$$\vec{v}' = \dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k}\ .$$

Millise kiirusega liigub ainepunkt 0-süsteemis? Valemi (5) ja (42) abil leiame:

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = (\dot{x}' + u)\vec{i} + \dot{y}'\,\vec{j} + \dot{z}'\,\vec{k} =$$

$$= \dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k} + u\vec{i} = \vec{v}' + \vec{u}\ ;$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}\ . \qquad (43)$$

Kiirusele süsteemis 0' tuleb liita süsteemide suhteline kiirus $\vec{u}$. See on täiesti üldine tulemus. Valem (43) on *klassikalise mehaanika kiiruste liitmise seadus.*

Leiame ka kiirenduste seose. Selleks tuleb (42)-st võtta kahekordne tuletis aja järgi. Saame

$$\ddot{x} = \ddot{x}',\ \ddot{y} = \ddot{y}',\ \ddot{z} = \ddot{z}'$$

järelikult

$$\vec{a} = \vec{a}^{\,\prime}\ .$$

Kui nüüd eeldame, et ka keha mass ja temale mõjuv jõud ei olene koordinaatsüsteemist, siis saame, et Newtoni II seadus ei olene sellest. Kuna süsteemid on inertsiaalsed, siis ka Newtoni I seadus kehtib mõlemas. Seepärast võib öelda, et kogu mehaanika näeb mõlemas süsteemis välja ühtemoodi. Seda näitab ka meie igapäevane praktika. Näiteks käest lahti pääsenud ese kukub ühtemoodi ülevalt alla nii jaamahoone juures kui ka ühtlaselt liikuvas vagunis. Palli suudame visata ühesugusele kaugusele nii kooli võimlas kui ka liikuva reisilaeva spordisaalis jne. Need põhimõtted võtab kokku *klassikalise mehaanika e. Galilei relatiivsusprintsiip.*

Kõik inertsiaalsed taustsüsteemid on nendes kulgevate mehaanikaprotsesside kirjeldamisel samaväärsed.

Printsiipi võib sõnastada ka teisiti.

Üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise mehaanikaseadused ei muutu.

Kui nähtustes midagi ei olene taustsüsteemi valikust, siis võib järeldada ka vastupidist, et ainult ühe taustsüsteemi sees tehtud vaatlused ei võimalda määrata taustsüsteemi liikumist. Näiteks olles suletud ühtlaselt liikuva laeva kajutisse nii, et puudub side välismaailmaga, ei suuda me mingit katset välja mõelda, mis näitaks laeva liikumist ja selle kiirust. Seepärast võib anda veel ühe relatiivsusprintsiibi sõnastuse.

Mitte mingisugused mehaanilised katsed ja vaatlused, mida tehakse inertsiaalsüsteemi sees, ei võimalda määrata selle liikumiskiirust.

28. Erirelatiivsusteooria postulaadid

Eelmises punktis esitatu on kõigile hästi arusaadav. Sellele vaatamata on juba Galilei aegadest alates arvatud nagu eksisteeriks üks eriline taustsüsteem, mis on maailmaruumi, nn. *absoluutse ruumi* suhtes paigal. Liikumist selle suhtes hakati nimetama samuti absoluutseks. Mehaanilised katsed, nagu me veendusime, ei võimalda absoluutse liikumise kiirust määrata. Kuni erirelatiivsusteooria loomiseni siiski arvati, et ükskord niisugune nähtus leitakse. Võib-olla näiteks valguse liikumise kaasabil? Valgus pidi olema nn. maailmaeetri lainetus. Eeter võis olla absoluutse ruumi suhtes paigal. Valguse kiirus selles on c = 300 000 km/s. Inimesele kättesaadav suurim kiirus on Maa kiirus liikumisel ümber Päikese ≈ 35 km/s. Mõõtes valguse kiirust siis, kui Maa liigub valguse suunas ja sellele vastu, võiks avastada absoluutset liikumist. Sellist katset sooritas ameeriklane A. Michel-son 1881. a. alates mitu korda. Mingit valguse kiiruse olenevust Maa liikumissuunast ta ei avastanud, kuigi katse täpsus seda võimaldanuks. See ja teised füüsikalised faktid viisid sajandivahetusel A. Einsteini mõttele, et relatiivsusprintsiip on universaalne loodusseadus.

Mitte mingisugused füüsikalised katsed ja vaatlused, mida tehakse inertsiaalsüsteemi sees, ei võimalda määrata selle liikumiskiirust.

Kõik inertsiaalsed taustsüsteemid on nendes kulgevate füüsikaliste protsesside kirjeldamisel samaväärsed.

Need on *üldise ehk Einsteini relatiivsusprintsiibi* sõnastused. See printsiip tähendab ühtlasi ka absoluutse ruumi ja absoluutse liikumise eitamist. Nendel mõistetel ei ole füüsikalist tähendust. Igasugune liikumine on alati suhteline.

Üldine relatiivsusprintsiip on üheks *erirelatiivsusteooria postulaadiks*, mille alusel see teooria on loodud. Teiseks on

valguse kiiruse olenematus nii valgusallika liikumisest kui ka inertsiaalsüsteemist, milles kiirust mõõdetakse.

Mis järeldub nendest postulaatidest? Pöördume tagasi joonise 23 juurde. Oletame, et alghetkel t = 0, kui 0' langeb kokku 0-ga, toimub selles punktis valgussähvatus. Aja t möödumisel on siis valgus levinud 0-süsteemis kaugusele

$$x = ct$$

ja 0' süsteemis – $x' = ct$,

s.t. samale kaugusele mõlemast koordinaatide alguspunktist. Kuid 0'-süsteem liikus valguse levimise ajal paremale. Seepärast oleks valgus justkui jõudnud kahte eri ruumipunkti x-telgede suunal. See ei ole võimalik. Teepikkused x ja x' peavad olema erinevad. Taustsüsteemist mitteoleneva c korral saavad need erineda ainult siis, kui ajad kummaski süsteemis on erinevad. Õige on kirjutada nii:

$$x = ct$$

ja $$x' = ct'.$$

Seega järgneb erirelatiivsusteooria postulaatidest otsekohe aja erinev kulgemine eri taustsüsteemides. See on vastuolus klassikalise ettekujutusega ajast. Sellist ettekujutust tuleb muuta.

29. Lorentzi teisendused

Kuidas teisenevad punkti koordinaadid üleminekul ühest taustsüsteemist teise erirelatiivsusteoorias? Vastuse leidmiseks jätkame joonisel 23 kirjeldatud katset. Oletame, et punktis, milleni valgus jõudis, asub peegel (näiteks vaguni seinal). See saadab valguse tuldud teed tagasi valgusallika asukohta. 0-süsteemis kulub tagasiminekuks endine aeg t, kui valgusallikas on seal paigal. 0'-süsteemis aga t'-st enam, sest valgusallikas on nihkunud valguse levimise ajal vasakule, jäänud vagunist maha, mistõttu valgusel tuleb tagasiliikumisel käia pikem tee kui x'. Olgu tagasiliikumise aeg t''. Siis liikus valgus tagasi teepikkuse x'' = ct'' võrra, jõudes punkti x' - x'' = c(t' - t'') 0'-süsteemis. Teisest küljest, valgusallikas on aja t' + t'' vältel nihkunud vasakule kiirusega u ja jõudnud punkti -u(t' + t''), on jäänud niipalju koordinaatide algusest 0' maha. Kui valgus jõudis tagasi allikani, peavad mõlemad avaldised andma sama asukoha:

$$c(t' - t'') = -u(t' + t'') .$$

Oletame, et ajad eri süsteemides on seotud nii:

$$t' = t \cdot f(u) ,$$

s.t. tuleb kasutada suhtelisest kiirusest u olenevat tegurit f(u). Arvatavasti oleneb aegade erinevus ainult sellest kiirusest. See tegur tuleb määrata.

Valguse tagasiliikumise aja t teisendamisel tuleb ilmselt sama tegurit kasutada vastasmärgilise suhtelise kiirusega:

$$t'' = t \cdot f(-u) \,,$$

sest nüüd liigub valgus süsteemide suhtelise kiirusega võrreldes vastupidises suunas. Füüsikaliselt tähendab liikumissuuna vastupidiseks muutmine koordinaattelgede või suhtelise kiiruse vastasmärgiliseks muutmist. Nii saame

$$c[t \cdot f(u) - t \cdot f(-u)] = -u[t \cdot f(u) + t \cdot f(-u)] \,.$$

Peale selle peab kehtima

$$f(-u) \cdot f(u) \cdot t = t$$

– kui me läheme ühest süsteemist teise, s.t. korrutame aega t teguriga f(u) ja tuleme siis sealt jälle esialgsesse süsteemi tagasi – korrutame teguriga f(-u), siis peame saama tagasi sama aja t. Sest tagasiteisendus on füüsikaliselt ekvivalentne otseteisendusega vastupidise kiirusega liikumisel ehk telgede või suhtelise kiiruse vastasmärgiliseks muutmisega. Järelikult on

$$f(-u) = 1/f(u) \,.$$

Selle abil leiame

$$c[f(u) - 1/f(u)] = -u[f(u) + 1/f(u)] \;;$$

$$c[f^2(u) - 1] = -u[f^2(u) + 1] \;;$$

$$f^2(u) = \frac{c-u}{c+u} = \frac{(c-u)^2}{c^2-u^2} = \frac{(1-u/c)^2}{1-(u/c)^2} \;;$$

$$f(u) = \pm \frac{1-u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \,.$$

Kõlbab "+" märk, sest aeg ei saa teisendamisel muutuda negatiivseks.

Leitud teguri abil jõuame aja teisendamise valemini:

$$t' = t\frac{1-u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{t-ut/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \,.$$

Edasi leiame seose koordinaatide jaoks:

$$x' = ct' = \frac{ct - ux/c}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} .$$

Seega võib teisendusvalemid üles kirjutada nii:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} ; \\ y' = y ; \\ z' = z ; \\ t' = \dfrac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \end{cases} \tag{44}$$

kus $\beta = u/c$. Need ongi *Lorentzi teisendusvalemid* [hollandi füüsik (1853-1928)]. Kui $u << c$, siis $\beta \approx 0$ ja me saame siit Galilei teisendused (42). Kunagi ei saa olla $u > c$, sest siis juur muutuks imaginaarseks. Seepärast on c reaalsete objektide liikumise piirkiirus.

30. Samaaegsus

Seni vaadeldud sündmused (valgussähvatus, sattumine peeglile ja jõudmine tagasi valgusallikani) toimusid eri aegadel eri kohtades. Nüüd huvitagu meid sündmuste üheaegsuse küsimus. Esialgu leiame, millal on kaks sündmust samaaegsed ühes ja samas inertsiaalsüsteemis? Sellele on lihtne vastata ainult siis, kui sündmused toimuvad ühes ja samas kohas. Seda näitab samas kohas asuv kell. Samaaegsed sündmused toimuvad ühel ja samal ajahetkel. Keerulisem on olukord kahe sündmusega eri kohtades. Võiks ju öelda, et nad on samaaegsed, kui nendes punktides olevad kellad näitavad sündmuste toimumise hetkel sama aega. Kuid selleks peavad kellad olema sünkroniseeritud, s.t. ühte aega näitama pandud. Mismoodi seda teha? Nad asuvad eri kohtades. Kokku viia, võrrelda ja siis tagasi asetada ei saa, sest nende käik (aja kulg) oleneb kellade liikumisest.

A. Einstein pani ette järgmise kellade sünkroniseerimise viisi. Kella A asukohast saadetakse välja valgussignaal ajahetkel t_{0A}. See jõuab teise kellani B selle näidu hetkel t_B ja peegeldub tagasi kella A asukohta viimase näidu t_A juures. Kui nüüd osutub õigeks võrdus

$$t_A - t_B = t_B - t_{0A} ,$$

siis on kellad sünkroniseeritud – valgus kulutab ühepalju aega nii edasi- kui tagasiliikumiseks. Avaldis on seda tüüpi, et kummagi kella näiduviga suurendab üht võrduse poolt, teist aga vähendab. Seepärast kehtib võrdus ainult siis, kui mõlemad kellad näitavad sama aega.

Seega tuleb *relativistlikus aegruumis* toimuvate sündmuste kirjeldamiseks sinna paigutada veel, lisaks koordinaatsüsteemile, kellad, mis kõik oleks eespool-kirjeldatud viisil sünkroniseeritud.

Oletame, et meie mõlema koordinaadistiku 0 ja 0' (Joon. 23) kõik punktid on varustatud sünkroniseeritud kelladega. Kummalgi taustsüsteemil on omad kellad. Lorentzi teisendusvalemitest (44) saame mingi ühe sündmuse jaoks kirjutada

$$t_1{}' = \frac{t_1 - \beta x_1/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ja teise jaoks –

$$t_2{}' = \frac{t_2 - \beta x_2/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Aegade erinevuseks saame

$$t_2{}' - t_1{}' = \frac{t_2 - t_1 - \beta(x_2 - x_1)/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \qquad (45)$$

Olgu sündmused 0-süsteemis *samaaegsed*, s.t. $t_2 = t_1$. Siis saame kirjutada

$$t_2' - t_1' = \frac{-\beta(x_2 - x_1)/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \neq 0 \ .$$

S.t. 0'-s need sündmused ei ole üldjuhul samaaegsed. Nad on ka siin samaaegsed ainult siis, kui toimuvad ühes ja samas kohas, s.t. $x_2 = x_1$. Koordinaadi x teisendusvalemist (44) võime leida, et siis on ka $x_2' = x_1'$. Neid tõsiasju võime väljendada järgmiste lausetega.

Kui sündmused toimuvad ühes ja samas punktis, siis nende samaaegsus ei olene taustsüsteemi valikust.

S.t., kui nad osutuvad samaaegseteks mingis ühes taustsüsteemis, siis on nad samaaegsed ka teistes. Teine lause:

Samaaegsete sündmuste asukohaline kokkulangevus ei olene taustsüsteemi valikust.

S.t., kui ühes on asukoht kahel samaaegsel sündmusel sama, siis on see nii ka teistes taustsüsteemides.

Kuidas aru saada üldjuhul esinevast (erinevates kohtades toimuvate sündmuste) samaaegsuse kadumisest üleminekul ühest süsteemist teise? Selleks tuuakse tavaliselt niisugune näide. Kaks vaatlejat jälgivad rongi otstesse löövaid välkusid. Üks asub sel hetkel maapinnal rongi keskel, teine rongis ja samuti selle keskel. Maapealne näeb kahte välku üheaegselt löövat nii rongi algusesse kui ka lõppu. Rongis sõitja, vaatamata sellele, et asub samuti rongi keskel, ei näe neid samaaegsetena. Ta näeb etteotsa löövat välku varem. Sest sama aja jooksul, kui valgus sealt temani liigub, on rong teatud tee valgusele vastu liikunud, tagumisest otsast tuleva valguse eest aga ära nihkunud. Mõlemal vaatlejal on õigus.

31. Ajavahemike ja pikkuste suhtelisus. Intervall

Valem (45) näitab, et mis tahes protsessi kulgemise aeg ei ole üldiselt igas süsteemis ühesugune. Võib ju $t_2 - t_1$ tähendada mingi protsessi kestust. Olgu 0-süsteemis protsess liikumatu, s.t. alaku ja lõppegu samas kohas ($x_2 = x_1$). Siis saame sellest valemist protsessi kestvuseks 0'-süsteemis, kus protsess liigub:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \tag{46}$$

Et $\sqrt{1 - \beta^2} < 1$, siis

$$t_2' - t_1' > t_2 - t_1$$

– protsess kulgeb aeglasemalt selles taustsüsteemis, kus see liigub ruumis. Kõige kiirem on protsess (kulub vähe aega) seal, kus tema asukoht ei muutu. Protsessiks võib näiteks olla inimese vananemine. Kiiresti ringisõitvas kosmosesõidukis olev astronaut vananeb aeglasemalt Maa-pealse mõõdusüsteemi mõttes, kui samal ajal Maal "paigalseisev" tema kaksikvend.

Analoogilise tulemuse saame valemitest (44) sündmuste vahekauguse kohta:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \tag{47}$$

Võtame näiteks kiirusega u liikuva vaguni. Selle otspunktide asukohad mõõdeti 0-süsteemis samaaegselt ($t_2 = t_1$) ja saadi vaguni pikkuseks x_2-x_1 . Mõõtmist võib teha näiteks eespoolkirjeldatud välkude jälgede järgi, mis need jätsid roobastele. 0'-süsteemis, kus vagun seisab paigal, on tema pikkus siis

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \tag{48}$$

Järelikult,

$$x_2' - x_1' > x_2 - x_1 .$$

Keha on kõige pikem selles taustsüsteemis, milles ta on paigal (0'-süsteem). Liikuv vagun (0-süsteemis) on mõõtmetelt lühem.

Viimast valemit ei saa tõlgendada nii, nagu oleks liikuvas süsteemis (x_2'-x_1') vagun pikem kui paigalseisvas (x_2-x_1), s.t. võtta vagun paigalseisvana 0-süsteemis ja vaadelda tema pikkust liikuvas süsteemis. Siis ei ole arvutatud vaguni otste kohad x_2' ja x_1' samaaegselt määratud (t_2' ei võrdu t_1'-ga) ja nende vahet ei saa lugeda vaguni pikkuseks. Kui aga vagun on paigal liikuvas süsteemis (eelmise seletuse puhul), on otspunktid ühes ja samas kohas igal ajahetkel ja meie võime neid mõõta ka erinevatel ajahetkedel. Vahe on ikkagi vaguni pikkus.

Klassikalises mehaanikas nimetatakse vahemikke x_2 - x_1 ja t_2 - t_1 *intervallideks*. Ajaline intervall ei olene seejuures ruumilisest ja need on muutumatud üleminekul ühest taustsüsteemist teise, s.t. pikkus ja ajavahemik ei olene liikumisest. Teisiti öeldes, ruumi ja aja omadused ei muutunud liikumisega. Relativistlikus – on kõik teisiti. Ruumi ja aja omadused sõltuvad kehade liikumisest ja olenevad teineteisest. Seepärast vaadeldakse kolme ruumikoordinaati x, y, z ja ajakoordinaati t kui ühe ruumi, nn. *neljamõõtmelise aegruumi* punkti koordinaate:

$$(x, y, z, ict) .$$

Ajalist koordinaati t korrutatakse tavaliselt imaginaarühikuga i, et lihtsustada mitmeid hilisemaid arvutusi, ja valguse kiirusega c, et dimensioonid oleksid kõigil koordinaatidel samad. Sellises ruumis arvutatakse kahe sündmuse vahelist "kaugust" nii, nagu ikka kaugust kahe punkti vahel [vt. valem (3)]:

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (ict_2 - ict_1)^2} . \tag{49}$$

Seda nimetatakse *sündmustevaheliseks intervalliks* relatiivsusteoorias.

Kontrollime, kuidas see intervall muutub üleminekul ühest taustsüsteemist teise. Kasutame valemit (45) ja (47). Nende puhul on mõlemad sündmused x-teljel, s.t. $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$, $y_2' = y_1'$ ja $z_2' = z_1'$, mistõttu intervalli ruut võrdub

$$
\begin{aligned}
(s')^2 &= (x_2' - x_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = \\
&= \frac{(x_2-x_1)^2 - 2u(x_2-x_1)(t_2-t_1) + u^2(t_2-t_1)^2}{1-\beta^2} - \\
&\quad - c^2\frac{(t_2-t_1)^2 - 2\frac{\beta}{c}(t_2-t_1)(x_2-x_1) + \frac{\beta^2}{c^2}(x_2-x_1)^2}{1-\beta^2} = \\
&= \frac{(x_2-x_1)^2(1-\beta^2) - c^2(t_2-t_1)^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{1-\beta^2} = \\
&= (x_2-x_1)^2 - c^2(t_2-t_1)^2 = s^2 .
\end{aligned}
$$

Seega, ***intervall ei muutu üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise***. Öeldakse ka, et intervall on *invariantne* üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise. Klassikalises mehaanikas kehtib see eraldi ajalise ja ruumilise intervalli kohta. Relativistlikus mehaanikas moodustavad ruum ja aeg ühtse terviku – aegruumi. Olenevalt kehade liikumisest muutuvad aegruumi omadused, kuid nii, et sündmustevaheline intervall (49) on invariantne. Intervalli avaldisest järgneb, et kui ühest süsteemist teise üleminekul sündmuste ruumiline vahekaugus kasvab, siis kasvab ka nende ajaline erinevus ja vastupidi (viimane vahe valemis (49) on negatiivse märgiga, kui i sulgude ette tuua). Ilma selleta ei jääks intervall muutumatuks.

32. Kiiruste liitmise relativistlik valem (kiiruse teisendamine)

Kiiruse komponendid leitakse, nagu ikka [vt. valem(4)], koordinaatide ajalise tuletise kaudu. Antud juhul on kaks aega – t ja t'. Kummaski süsteemis tuleb kasutada oma aega:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_{x'} = \frac{dx'}{dt'} \qquad jne.$$

Kuid kiiruste seosvalemi saamiseks tuleb valemitest (44) võtta tuletisi ühe aja järgi. Sellest tekib vajadus võtta tuletist ühe süsteemi suurusest teise süsteemi aja järgi. Kuidas seda teha?

Kasutame nn. muutuja vahetamise võtet. Mingist primmita suurusest a tuletise t' järgi leiame nii:

$$\frac{da}{dt'} = \frac{da}{dt'} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{da}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'},$$

s.t. võtame tuletise t järgi ja tulemust korrutame tuletisega dt/dt'. Viimase saab leida neljandast seosvalemist (44):

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{1 - \frac{\beta dx}{c\,dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 - \frac{\beta v_x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Otsitav tuletis on selle pöördväärtus.

Nüüd võime leida tuletisi t' järgi avaldistest (44):

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt'} - u\frac{dt}{dt'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dt}{dt'} =$$

$$= \frac{v_x - u}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta v_x}{c}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{\beta v_x}{c}};$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = v_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\beta v_x}{c}};$$

$$v_z' = v_z \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\beta v_x}{c}}.$$

Nii saimegi *kiiruste teisendamise ehk liitmise relativistlikud valemid*:

$$\begin{cases} v_x' = \dfrac{v_x - u}{1-\frac{\beta v_x}{c}}; \\ v_y' = \dfrac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\beta v_x}{c}}; \\ v_z' = \dfrac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\beta v_x}{c}}. \end{cases} \tag{50}$$

Paneme tähele, et üleminekul ühest süsteemist teise ei muutu ainult kiiruse komponent, mis on suhtelise kiiruse u suunaline. Ka teised kiiruse komponendid muutuvad. Seetõttu ei kehti lihtne kiiruste liitmise reegel (43):

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}\,.$$

Selle saame ainult siis, kui $u << c$ ehk $\beta \approx 0$.

Rakendame saadud valemeid järgmisele huvitavale juhtumile. Üks valguskiir liikugu teisele vastu. Määrame nende suhtelise kiiruse. Selleks seome 0'-süsteemi ühe valguskiirega. See liikugu 0-süsteemis kiirusega $+c$. Süsteemide suhteline kiirus u on siis c, s.t. $\beta = 1$. Vastu liikuva valguse kiirus 0-süsteemis on siis v_x=$-c$. Kiirus v_x' on 0'-süsteemile vastu liikuva valguskiire kiirus selles taustsüsteemis, s.t. otsitav valguskiirte suhteline kiirus. Valemitest (50) saame

$$\begin{cases} v_x^{/} = \dfrac{-c-c}{1+\dfrac{1\cdot c}{c}} = -c\ ; \\ v_y^{/} = 0\ ; \\ v_z^{/} = 0\ . \end{cases}$$

Valguskiirte suhteline kiirus ei ole mitte -2*c*, mis järgneks klassikalisest kiiruste liitmise seadusest (43), vaid -*c*.

§ 5. Relativistlik dünaamika

33. Relativistlik impulss ja mass

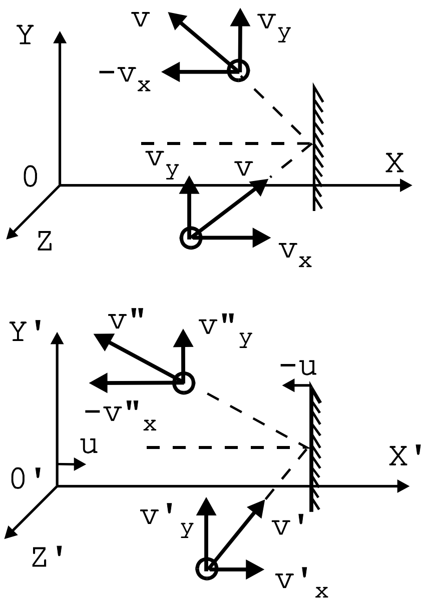
Üldine relatiivsusprintsiip nõuab, et kõik füüsikalised nähtused kulgeksid igas inertsiaalsüsteemis ühesuguste seaduspärasuste järgi. Võtame näiteks kehade põrkumise. Selles kehtib impulsi jäävuse seadus. Relativistlik impulss tuleb defineerida nii, et see seadus kehtiks igas inertsiaalsüsteemis.

Vaatleme kera elastset põrkumist hästi massiivselt seinalt (Joon. 24). 0-süsteem on seotud seinaga. Selles süsteemis kiiruse y-komponent säilib põrke käigus. Seega säilib ka impulsi $m\vec{v}$ y-komponent. x-komponent muutub vastupidiseks seina mõju tõttu. Kiirusvektor moodustab seina normaaliga ühesuguse nurga nii enne kui ka pärast põrkumist (nn. peegeldumisseadus).

Kuidas on olukord 0'-süsteemis? Esmalt, enne joonise teise osa tegemist, arvutame kiirused selles süsteemis valemite (50) abil ($v_z = 0$):

1) enne põrget: 2) pärast põrget (v_x on muutnud märki):

$$\begin{cases} v_x^{/} = \dfrac{v_x - u}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}} ; \\ v_y^{/} = \dfrac{v_y\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \dfrac{\beta v_x}{c}} ; \\ v_z^{/} = 0 . \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x^{//} = \dfrac{- v_x - u}{1 + \dfrac{\beta v_x}{c}} ; \\ v_y^{//} = \dfrac{v_y\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \dfrac{\beta v_x}{c}} ; \\ v_z^{//} = 0 . \end{cases}$$



Joon. 24

$v_x{}'$ on v_x-st ~u võrra väiksem, $v_y{}'$ erineb vähe v_y-st. $|v_x{}''|$ on $|v_x{}'|$-st ~$2u$ võrra suurem, $v_y{}''$ on $v_y{}'$-st väiksem. Neid tulemusi kajastab ka joonise 24 teine osa. Nii x- kui ka y-komponent on muutunud põrke käigus. Sama kehtib ka impulsi $m\vec{v}$ komponentide kohta. Et see juhtus x-komponendiga, on arusaadav (liikuva seina mõju), kuid miks väheneb y-komponent? Seda ei või tegelikkuses esineda – põrke iseloom oleneks taustsüsteemi valikust. Seinaga paralleelne impulsi komponent peab ka siin säilima.

Uurime v_y muutumise põhjust. See arvutub $v_y = dy/dt$. Valemitest (44) näeme, et y ei muutu üleminekul ühest süsteemist teise. Seega on kiiruse muutumise põhjus aja t muutumine. Muutumatu y-komponendiga impulsi saamiseks tuleb see defineerida ühesuguse aja järgi kõigis taustsüsteemides. Selleks sobib nn. *omaaeg* – aeg süsteemis, kus keha on paigal. Tähistame selle τ-ga. Valemi (46) puhul on selleks aeg t. Diferentsiaalsete ajavahemike jaoks saame sellest valemist

$$dt' = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} \,. \tag{46'}$$

Süsteemide suhteline kiirus u on nüüd keha liikumise kiirus v'. Ühes on keha paigal, teises liigub kiirusega v'. Seega, vana impulsi

$$m\vec{v}' = m\frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

asemele võtame 0'-süsteemis

$$\vec{p}' = m\frac{d\vec{r}'}{d\tau} = m\frac{d\vec{r}'}{dt'\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} = \frac{m\vec{v}'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} \,. \tag{51}$$

Sellise impulsi y-komponent säilib joonisel 24 kujutatud katses:

$$p_y' = \frac{mv_y'}{\sqrt{1 - \frac{(v_x')^2 + (v_y')^2}{c^2}}} = \frac{mv_y''}{\sqrt{1 - \frac{(v_x'')^2 + (v_y'')^2}{c^2}}} = p_y'' \,.$$

z-komponendid on 0-d, s.t. säilivad samuti. On soovitav seda iseseisvalt kontrollida.

Kui $v'/c \approx 0$, siis (51)-st saame klassikalise valemi

$$\vec{p}_k' = m\vec{v}' \,.$$

Valemit (51) tõlgendatakse ka teisiti. m on seal nn. keha *paigaloleku mass* – mass süsteemis, kus keha on paigal. Edaspidi tähistame selle m_0-ga. Kiirusega v liikuva keha mass on siis

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{52}$$

Sel juhul arvutatakse impulss jällegi klassikalisel kujul $\vec{p} = m\vec{v}$. Valemist (52) aga selgub, et kiiruse kasvades kasvab ka keha mass, s.t. keha inerts. See ongi põhjuseks, miks reaalset keha ei jõuta kiirendada kiiruseni $v = c$. Siis oleks keha mass ja energia lõpmatult suur ning niisuguse kiiruse saavutamiseks vajaminevat energiat ei ole kiirendajal kuskilt võtta.

Joonisel 24 0'-s näidatud kiiruse y-komponendi jäävuse rikkumine on tingitud sellest, et me võtsime keha massi konstantseks. Kui arvestame selle olenevust kiirusest, siis osutub ka seinaga paralleelne kiirus ja impulss jäävaks.

34. Relativistlik kineetiline energia

Klassikalisel juhul jõudsime kineetilise energia mõisteni jõu töö kaudu. Relativistlikul toimitakse samuti. Ka jõud defineeritakse siin klassikalisel viisil

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} , \tag{53}$$

kuid impulss $\vec{p}$ on juba relativistlik. Seda valemit nimetatakse ka *relativistliku dünaamika põhiseaduseks*.

Arvutame jõu poolt tehtava töö vaba keha kiirendamisel:

$$A = \int \vec{F} d\vec{s} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{s} = \int \vec{v} d\vec{p} .$$

Anname integraali märgi all seisvale avaldisele niisuguse kuju, et oskaksime integreerida. Selleks avaldame impulsi mooduli kiiruse kaudu valemist (51) ja võtame sellest tuletise *v* järgi:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \; ; \qquad (54)$$

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m_0}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \; ;$$

$$d\vec{p} = \frac{m_0 d\vec{v}}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \; ;$$

$$\vec{v}d\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v} d\vec{v}}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{m_0 \frac{1}{2} d(\vec{v}^{\,2})}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}} \; .$$

Tähistades $q = v^2/c^2$, võime töö jaoks kirjutada

$$A = \int \frac{m_0 c^2 dq}{2(\sqrt{1 - q})^3} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - q}} + A_0 \; .$$

Integreerimiskonstandi A_0 määrame järgmiselt. Töö peab võrduma 0-ga, kui vaba keha ei kiirendatud ($v = 0$; q = 0):

$$0 = m_0 \, c^2 + A_0 \; ; \quad A_0 = - m_0 \, c^2 \; .$$

Järelikult, vaba keha kiirendamiseks sooritatud töö, s.t. keha kineetiline energia võrdub

$$W_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 . \tag{55}$$

Kui $v << c$, siis võime ligikaudu kirjutada

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

ja saada kineetilise energia jaoks

$$W_k = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \right) - m_0 c^2 = \frac{m_0 v^2}{2}$$

– klassikalise valemi.

Relativistliku massi mõiste abil [vt. valem (52)] võib (55) üldjuhul ümber kirjutada nii:

$$W_k = mc^2 - m_0 c^2 . \tag{55'}$$

$m_0 c^2$ nimetatakse keha *paigalseisu energiaks*. See on

***keha koostisosade vastastikuse seose ja sisemise liikumise energia*.**

Paigalseisuenergia ja kineetilise energia summat

$$W = m_0 c^2 + W_k = mc^2 \tag{56}$$

nimetatakse *vaba keha koguenergiaks*. Seega,

***keha relativistlik mass on ühtlasi tema koguenergia mõõt*.**

Öeldakse ka, et

***mass ja energia on ekvivalentsed suurused*.**

Kui üks neist kasvab, siis kasvab ka teine ja vastupidi. See ei kehti mitte ainult mehaanikas. Iga energialiigiga on nii. Näiteks pange vee soojendamisel ei muutu see mitte ainult energiaküllasemaks, vaid ka inertsemaks, raskemaks. On soovitatav arvutada soojushulk, mis kulub pange vee raskuse kahekordistamiseks, ja võrrelda seda sama veehulga aurustamiseks kuluva soojushulgaga.

Seose (52) ja (54) abil saab koguenergia (56) avaldada impulsi kaudu:

$$W = c\sqrt{p^2 + (m_0 c)^2}\ . \qquad (57)$$

Väikese impulsi puhul võib seda teisendada järgmiselt:

$$W = m_0 c^2 \sqrt{\left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2 + 1} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}\ .$$

Siit saame kineetilise energia jaoks

$$W_k = \frac{p^2}{2m_0}\ , \qquad (58)$$

mis on klassikaline valem. Nii teisenevad kõik relatiivsusteooria valemid klassikalisteks keha kiiruse olulisel vähendamisel.

35. Üldrelatiivsusteooriast

Ligikaudu 10 aastat pärast erirelatiivsusteooria loomist üldistas A. Einstein seda mis tahes taustsüsteemidele ja lõi *üldrelatiivsusteooria*. Erirelatiivsusteoorias vaadeldi ainult inertsiaalseid taustsüsteeme, üldises võetakse arvesse ka kiirendusega liikuvad süsteemid. Selles mõttes see teooria üldisem ongi. Kiirendusega liiguvad tavaliselt vabad kehad gravitatsiooniväljas gravitatsioonijõu mõjul. Seetõttu on üldrelatiivsusteooria sisuliselt relativistlik gravitatsioonivälja teooria. See on kaasaegse *astrofüüsika* ja *kosmoloogia* teoreetiliseks aluseks.

Üldrelatiivsusteooria on üles ehitatud *ekvivalentsusprintsiibist* lähtudes. Nimelt

***ei ole mingit põhimõttelist vahet gravitatsioonijõu ja inertsijõu vahel*.**

Näiteks tõusvas liftis ei saa meie kuidagi eristada gravitatsioonijõudu inertsijõust. Me ei oska lifti põranda surves jalgadele teha vahet selle osade vahel, mis on tingitud gravitatsioonist ja mis inertsist. On ükskõik, kas lift seisab paigal gravitatsiooniväljas või liigub kiirendusega oma mootori veojõu mõjul kaugel kõigist taevakehadest. Lift mõjutab meid mõlemal juhul ühesuguse jõuga.

Inertsijõu ja gravitatsioonijõu ekvivalentsust näitab ka see, et kõigil mõõtmistel, mis seni on sooritatud, ei ole suudetud vahet teha keha kaalumisel saadava massi ja inertsinähtustest määratava massi vahel. Esimest nimetatakse *raskeks*, teist *inertseks massiks*. Teisiti öeldes,

***keha raske ja inertne mass on täpselt võrdsed*.**

Veel ühe näitena võib tuua nn. *kaaluta oleku*. Vabalt langevas liftis või väljalülitatud mootoriga sõitvas kosmoselaevas on inertsijõud täpselt võrdne gravitatsioonijõuga. Keha liigub kiirendusega, aga kiirendust me ei taju. Kõik füüsikalised nähtused kulgevad seal nii nagu inertsiaalsüsteemiski, kuigi süsteem tegelikult liigub kiirendusega, s.t. gravitatsioonivälja võib asendada inertsijõudude väljaga.

Kiirenevalt liikuvate süsteemide matemaatilisel kirjeldamisel jõutakse välja *mittehomogeense ruumi mõisteni*. Massiivsete kehade ümber muutub ruum kõveraks. Seal hakkavad vabad kehad liikuma kiirendusega. Sellega seletataksegi gravitatsiooni. Kõveras ruumis on vaba keha kiirendusega liikumine niisama iseenesest mõistetav nähtus nagu ühtlane sirgjooneline liikumine "sirges" ehk eukleidilises ruumis.