III pt. VÕNKUMISED JA LAINED

Selles peatükis käsitleme peamiselt mehaanilisi võnkumisi ja laineid, kuid enamik esitatavast kehtib ka teiste juures. Näiteks elektromagnetiliste ja optiliste juures. Seepärast me ei korda hiljem, elektrikursuses, optikas ja aatomifüüsikas analoogilist osa. Vajadusel viitame tagasi sellele peatükile.

§ 6. Võnkumised

36. Harmooniline võnkumine

Mis tahes füüsikaline suurus või süsteem võib võnkuda. Konkreetsuse mõttes kasutame mehaanilisi nähtusi, kuid öeldu kehtib ka kõigi teiste füüsikaliste protsessi-de puhul.

[Katsed mitmesuguste võnkumiste jälgimiseks.]

Võnkumiseks nimetatakse füüsikalise suuruse muutust, milles see kaldub oma keskmisest väärtusest kõrvale kord ühes, kord teises suunas. Mehaaniline võnkumine on keha liikumine, milles see kaldub oma tasa-kaaluasendist kõrvale kord ühes, kord teises suunas.

Võnkumine võib olla perioodiline ja mitte. Perioodilistest on kõige lihtsam *harmooniline võnkumine*.

Harmooniliseks nimetatakse võnkumist, milles võnkuv suurus muutub ajas sinusoidaalse seaduspärasuse järgi.

Harmooniline ja sinusoidaalne – nendel sõnadel on füüsikas üks ja sama tähendus.

Harmooniline võnkumine tekib ühtlase ringliikumise projekteerimisel sirgele, mis asub ringliikumise tasandis.

[Katse ringjoonel liikuva pallikese varju saamiseks.]

Varju tumedus näib olevat kõige suurem äärmistes asendites. See näitab, et võnkuv keha viibib nendes kohtades suurema osa ajast, keskmistes asendites aga vähe – neid läbitakse suure kiirusega.

Kui selline võnkumine "laiali laotada" võnkumisega ristuvas suunas, saamegi sinusoidi.

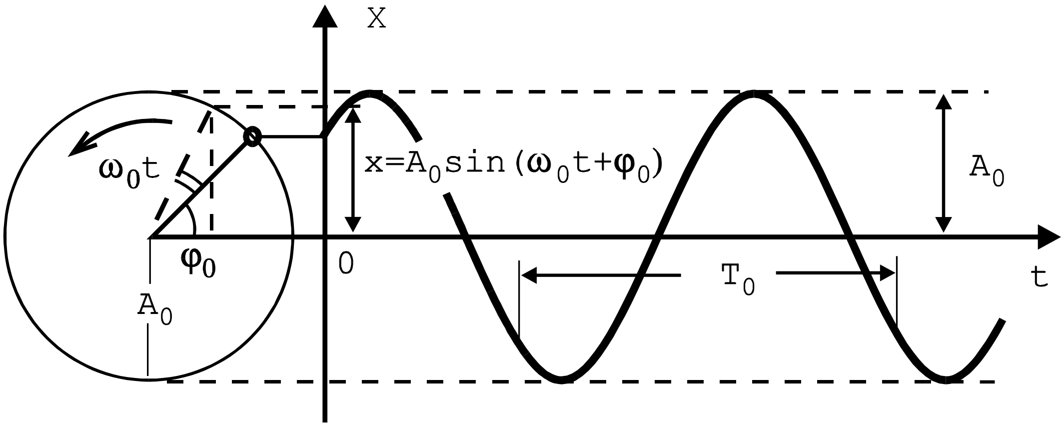
[Katse helihargilt ja pöörlevalt kaheksatahuliselt peeglilt peegelduva laserkiirega.]

Paigalseisva peegli ja heliseva hargi puhul saame võnkuva valguslaigu. Peegli pöörlemisel see laik joonistab ekraanile (seinale) sinusoidi.

Selgitame vastavate suuruste vahelisi seoseid skemaatiliselt joonisel 25. Raadiusega A_0 ja nurkkiirusega ω_0 pöörlev punkt asub ajahetkel $t_0 = 0$ asendis φ_0. Ajahetkeks t on nurk suurenenud $\omega_0 t$ võrra, omades väärtust

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \,. \qquad (59)$$

Võnkumise juures nimetatakse φ *faasiks* ja φ_0 *algfaasiks*. Faas kirjeldab olukorda, milles võnkuv keha antud hetkel viibib. Näiteks:



Joon. 25

1) $\varphi = 0$ või $\pi = 180°$ – keha on tasakaaluasendis. 0 korral läbib seda ühes suunas, π korral aga vastassuunas.

2) $\varphi = \pi/2$ – ühes äärmises asendis, kõige kaugemal tasakaaluasendist. Seda kaugust A_0 nimetatakse võnkumise *amplituudiks*.

3) $\varphi = -\pi/2$ või $3\pi/2$ – teises äärmises asendis. Iga 2π tagant hakkab füüsikaline olukord korduma, s.t.

***faasi muutumise perioodiks on* 2π.**

Faasiväärtuse 2π võib lugeda jällegi 0-ks, samuti 4π, -2π jne.

Faasidest räägitakse ka elektrivoolu korral. Kolmefaasilises voolus on antud hetkel voolu iseloomustaval suurusel (pingel või voolutugevusel) igas kolmes juhtmes isesugune faasi väärtus. Kui faas oleks kõigis alati ühesugune, siis oleks vool ühefaasiline. Sel juhul ei ole 3 juhtme kasutamisel mõtet.

Kuu faasid tulenevad samast mõistest.

Suurust x (Joon. 25), mis mõõdab kõrvalekaldumist tasakaaluasendist või nullväärtusest, nimetatakse *hälbeks*. Amplituud A_0 on siis *hälbe maksimaalväärtus*. Aega, mille jooksul hälve (keha, füüsikaline suurus) sooritab ühe täisvõnke, nimetatakse *võnkumise perioodiks* (T_0). Selle pöördväärtust, s.o. võngete arvu ühes ajaühikus, nimetatakse *sageduseks*:

$$\upsilon_0 = \frac{1}{T_0} .$$

Kui aeg muutub perioodi võrra, siis muutub faas 2π võrra. Valemist (59) saame tingimuse:

$$\omega_0(t + T_0) + \varphi_0 - (\omega_0 t + \varphi_0) = 2\pi .$$

Siit

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} ;$$

$$\omega_0 = 2\pi\upsilon_0 .$$

Võnkumise juures nimetatakse ω_0 *ringsageduseks või nurksageduseks*. See on ka *faasi muutumise kiirus*, sest näitab faasi muutust ajaühikus. Mõõdetakse ühikutes rad/s.

Hälbe muutumist ajas kirjeldav avaldis (saadakse joonisel 25 kujutatud kolmnurga abil)

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

on üks näide liikumisseadusest (vt. punkti 3). Võttes sellest tuletise aja järgi, saame keha liikumise kiiruse:

$$\dot{x} = v_x = A_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = v_{max} \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Kiiruse faas on hälbe omaga võrreldes $\pi/2$ võrra ees. Näiteks kui x on alles 0, omab kiirus juba maksimaalset väärtust:

$$v_{max} = A_0 \omega_0 .$$

Teine tuletis annab kiirenduse:

$$\ddot{x} = a_x = -A_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = a_{\max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \, .$$

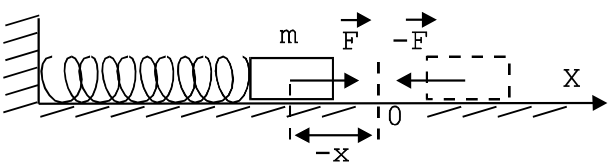
Selle faas on $\pi/2$ võrra kiiruse või π võrra hälbe omast ees. Viimase võrduse võib ka nii ümber kirjutada:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \, . \qquad (60)$$

See on *harmoonilise võnkumise diferentsiaalvõrrand*. Sellist seost peavad rahuldama kõik võnkumisseadused (hälbe avaldised), mis kujutavad harmoonilisi võnkumisi.

37. Vedrupendel. Matemaatiline ja füüsikaline pendel

Kujutame joonisel 26 vedru külge kinnitatud keha liikumas hõõrdumisvabalt horisontaalsel pinnal.



Joon. 26

Keha väljaviimisel tasakaaluasendist 0 tekib alati sinna tagasi viiv jõud. Elastsete deformatsioonide piires on see võrdeline hälbega (*Hooke'i seadus*):

$$F = -kx \, .$$

k on *vedru jäikus* – ühikdeformatsiooni põhjustav jõud. Mõõtühikuks on N/m. Avaldades jõu kiirenduse $a = \ddot{x}$ kaudu, saame

$$m\ddot{x} = -kx \quad ;$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \ .$$

See on harmoonilise võnkumise diferentsiaalvõrrand (60), milles võnkumise ringsageduse ruutu asendab kordaja *k/m*. Järelikult hakkab keha võnkuma harmooniliselt ringsagedusega

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ . \tag{61}$$

Võnkeperiood on siis

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ . \tag{62}$$

Need suurused olenevad keha massist ja vedru jäikusest. Millise amplituudiga A_0 ja algfaasiga φ_0 keha võnkuma hakkab, see oleneb *algtingimustest* – kui suure jõuga keha tasakaaluasendist välja viiakse ja millisel ajahetkel see vabaks lastakse.

Eelöeldu põhjal võib ka väita, et

harmooniline võnkumine on võnkumine hälbega võrdelise ja tasakaaluasendi poole suunatud jõu mõjul.

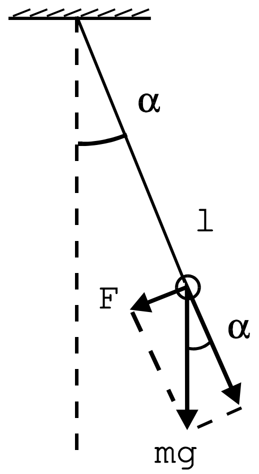
Kui võrdelisus ei ole täpne, siis ei ole ka võnkumine täpselt harmooniline. Võnkumisseadus on sinusoidaalsest keerulisem.

Teise näitena vaatleme *matemaatilist pendlit* (Joon. 27). Kaalutu ja venimatu niidi otsa on riputatud ainepunkt. Tasakaalu poole viiv jõud arvutub järgmiselt:

$$F = -\ mg\ \sin\alpha \ .$$

See põhjustab tangentsiaalse kiirenduse

$$a_\tau = \frac{F}{m} = -\ g\ \sin\alpha \ .$$



Joon. 27

Sama kiirendus on avaldatav nurkkiirenduse $\ddot{\alpha}$ ja pöörlemisraadiuse l korrutisena [vt. valemit (14)]. Nii saame tekkiva võnkumise diferentsiaalvõrrandiks

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0 .$$

Võrdlemisel valemiga (60) leiame, et üldjuhul ei ole võnkumine harmooniline. Harmoonilise saame, kui paneme pendli võnkuma väikese amplituudiga – mõnekraadise nurga all. Siis võib, nurka radiaanides mõõtes, teha asenduse $\sin \alpha \approx \alpha$ ja võrrand muutub harmoonilise võnkumise omaks:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0 .$$

Nurksageduseks saame

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{63}$$

ja perioodiks

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \tag{64}$$

Seega valemid (63)-(64) kehtivad ainult väikese amplituudiga võnkumiste puhul.

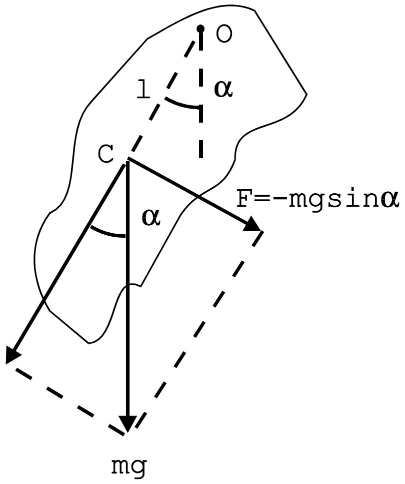
Kolmanda näitena vaatleme nn. *füüsikalist pendlit.*

Füüsikaliseks pendliks nimetatakse iga reaalset keha, mis ripub kinnitatuna raskuskeskmega mittekokkulangevast punktist (Joon 28).

Tasakaaluasendisse viiv jõud F põhjustab momendi

$$M = Fl = -mgl \sin \alpha .$$

Pöördliikumise dünaamika põhivõrrandi (39') järgi võrdub see inertsimomendi I ja nurkkiirenduse $\ddot{\alpha}$ korrutisega. Inertsimoment peab olema arvutatud telje suhtes, mis läbib kinnituspunkti 0 ja on keha pöörlemisteljeks. Nii saame diferentsiaalvõrrandiks



Joon. 28

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I} \sin \alpha = 0 .$$

Ka selle pendli võnkumine ei ole üldjuhul harmooniline. Ainult mõnekraadiste nurkade puhul saame sellise võnkumise:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I} \alpha = 0 .$$

Seega

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \tag{65}$$

ja

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} . \tag{66}$$

Kui tähistada

$$l' = \frac{I}{ml} ,$$

siis saame ringsageduse ja perioodi valemile anda matemaatilise pendli omaga kokkulangeva kuju. Suurust l' nimetatakse *füüsikalise pendli redutseeritud (taandatud) pikkuseks*.

***Sellise pikkusega matemaatiline pendel võngub täpselt sama sagedusega nagu antud füüsikaline pendel*.**

Füüsikalise pendli periood oleneb pendli massist, massi paiknemisest pendli kinnituspunkti suhtes ja massikeskme kaugusest kinnituspunktist.

38. Harmoonilise võnkumise energia

Vaatleme veel kord vedrupendlit joonisel 26. Arvutame töö keha väljaviimisel tasakaaluasendist:

$$A = \int_0^x F\,dx = k\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}kx^2 .$$

Sama suur on vedrupendli potentsiaalne energia hetkel, mil hälve on x:

$$W_p = \frac{k\,x^2}{2} = \frac{k\,A_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) . \qquad (67)$$

Hälbe järgi on energia muutumine paraboolne, ajas toimub see siinuse ruudu funktsiooni järgi. Kuidas muutub kineetiline energia?

$$W_k = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{m\,(\dot{x})^2}{2} = \frac{m\,\omega_0^2 A_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) . \qquad (68)$$

Kiiruse järgi on muutus paraboolne, ajas – koosinuse ruudu funktsioon. Muutuste amplituud on sama, mis potentsiaalsel energial, sest valemi (61) abil võime leida, et $m\,\omega_0^2 = k$. Seepärast saame kogu mehaanilise energia jaoks kirjutada:

$$W = W_p + W_k = \frac{kA_0^2}{2}[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{kA_0^2}{2}.$$

See säilib ajas. Ka amplituud säilib. Jätame meelde, et

võnkuva keha energia on võrdeline amplituudi ruuduga.

Seda on hiljem tarvis lainete ja kiirguste energia hindamisel. Potentsiaalne ja kineetiline energia muutuvad nii, et kui üks on 0, on teine maksimaalne – $kA_0^2/2$ – ja vastupidi. Toimub pidev energia üleminek ühest liigist teise. Jõud, mis kehale mõjub, kord vähendab, kord suurendab selle kineetilist energiat. Tasakaaluasendist kaugenemisel on jõud suunatud liikumisele vastu ja vähendab kineetilist energiat, tasakaalu poole liikumisel aga suurendab seda.

39. Samas sihis toimuvate võnkumiste liitmine

Võnkuvale kehale võib samaaegselt mõjuda mitu tasakaaluasendi poole viivat jõudu. Neid võib liita ja vaadelda võnkumist ikkagi ühe jõu põhjustatud liikumisena. Võib ka liita erinevate jõudude poolt tekitatud liikumisi. Siis räägitakse *võnkumiste liitmisest*. Tulemus kannab *liitvõnkumise* nime.

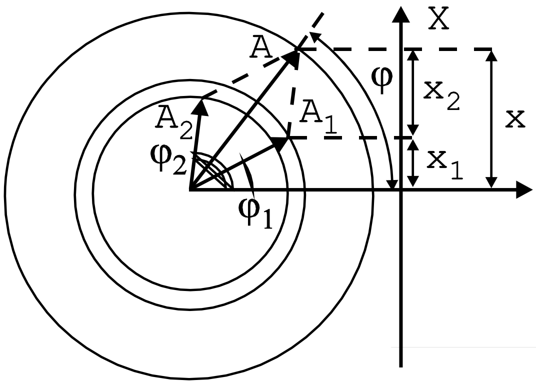
Üks jõud eraldi võetuna põhjustagu võnkumist amplituudiga A_1 ja faasiga φ_1:

$$x_1 = A_1 \sin\varphi_1 ,$$

teine – amplituudiga A_2 ja faasiga φ_2:

$$x_2 = A_2 \sin\varphi_2 .$$

Missuguseks kujuneb keha liikumine siis, kui mõlemad jõud mõjuvad koos? Siin saame anda vastuse ainult juhul, kui summaarne jõud F_1+F_2 ei põhjusta väljumist elastsuse piiridest, s.t. ka summaarse jõu korral kehtib võrdeline sõltuvus nihke ja jõu vahel (Hooke'i seadus). Sellisel juhul on liitvõnkumise hälve x hälvete x_1 ja x_2 summa:



Joon. 29

$$x = x_1 + x_2 .$$

Erinevate jõudude põhjustatud nihked liituvad. Et valitseb võrdeline seos summaarse jõu ja nihke vahel, siis on liitvõnkumine samuti harmooniline võnkumine mingi amplituudiga A ja faasiga φ:

$$A \sin \varphi = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 .$$

Kujutame seda liitmist joonisel 29 ringliikumise abil – pöörlevate vektorite projektsioonide liitmisena. Liitvõnkumist kujutava pöörleva vektori saame liidetavaid võnkumisi kujutavate vektorite summeerimisega:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 .$$

Horisontaalteljele võetud projektsioonide jaoks võime samal ajal kirjutada:

$$A \cos \varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 .$$

Saadud avaldiste suhe annab valemi *liitvõnkumise faasi* arvutamiseks:

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} . \qquad (69)$$

Avaldiste ruututõstmine ja liitmine annab:

$$A^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = A_1^2(\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1)+$$

$$+2A_1A_2(\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\varphi_1\cos\varphi_2)+A_2^2(\sin^2\varphi_2+\cos^2\varphi_2)$$

ehk

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) . \qquad (70)$$

See on *liitvõnkumise amplituudi* arvutusvalem. Summaarne amplituud oleneb nii liidetavate võnkumiste amplituudidest kui ka faasierinevusest – *faasivahest* $\varphi_2 - \varphi_1$. Viimasel on kaks erilist väärtust.

1) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$, kus n = 0, ±1, ±2, ... (paarisarv π-sid). Öeldakse, et võnkumised liituvad *samas faasis*. Valemist (70) saame:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2 \; ; \;\; A = A_1 + A_2 .$$

Amplituudid liituvad. Võnkumised tugevdavad teineteist maksimaalselt.

2) $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ (paaritu arv π-sid). Öeldakse, et võnkumised liituvad *vastasfaasis*. Sellisel juhul $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)=-1$ ja

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2 \; ; \;\; A = A_1 - A_2 .$$

Amplituudid lahutuvad. Võnkumised nõrgendavad teineteist maksimaalselt. Kui $A_1 = A_2$, siis maksimaalsel tugevdamisel amplituud kahekordistub ja energia neljakordistub (vt. punkti 38). Nõrgendamisel aga saavad mõlemad võrdseks 0-ga. Keha ei võngu, vaid püsib paigal, vaatamata sellele, et ta võtab osa kahest võnkumisest – kehale mõjub kaks vastassuunalist võnkumapanevat jõudu.

40. Tuiklemine

Vaatleme ühte samasihiliste võnkumiste liitmise erijuhtu – liidetavad võnkumised olgu harmoonilised. Siis on faasid avaldatavad lineaarfunktsioonidena:

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{01} ;$$

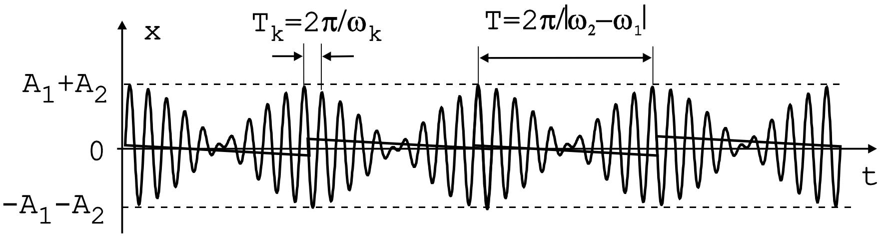
$$\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{02} .$$

Faasivahe on

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_{02} - \varphi_{01} .$$

See muutub samuti ajas lineaarselt. Seepärast muutub ka liitvõnkumise amplituudi ruut (70) ajas sinusoidaalselt. Muutumise ringsageduseks on $\omega_2 - \omega_1$. Võnkumised kord tugevdavad, kord kustutavad teineteist (Joon. 30). Joonis vastab juhule, kus $A_1 = A_2$. Selle võrduse mittekehtimisel amplituud ei kahane miinimumides nullini, vaid saavutab mingi väärtuse $A_1 - A_2$.

Kirjeldatud nähtust nimetatakse *tuiklemiseks*. Tuiklemise või faasivahe muutumise periood T on määratud liidetavate võnkumiste sageduste vahega (Joon. 30).



Joon. 30

Nähtust nimetatakse tuiklemiseks ainult siis, kui

$|\omega_1 - \omega_2| << \omega_{1,2}$, s.t. kui liituvad lähedaste sagedustega võnkumised. Suure sageduste vahe korral ei ole liitvõnkumise pilt nii lihtne. Selget amplituudi perioodilist suurenemist ja vähenemist ei ole märgata.

Sõna "tuiklemine" tuleneb vastavast kuulmisaistingust, millise tekitavad kõrvas kaks vähesel määral erineva sagedusega heli.

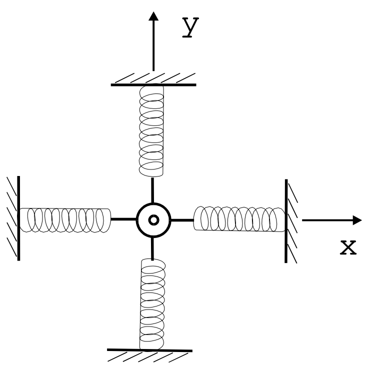
[Katse tuiklemise tekitamiseks kahe helihargi abil. Võib ka võimendada ja ostsillograafil nähtavaks muuta.]

Mõlema helihargi üheaegsel helisemisel tekib hääles tuiklemine. Nähtust kasutatakse muusikariistade häälestamisel. Kahe heli kõrgused langevad kokku, kui nende kooskõlamisel tuiklemise sagedus langeb alla ≈ 0,1 hertsi.

41. Ristuvates sihtides toimuvate võnkumiste liitmine

Selline juht võib esineda näiteks joonisel 31 näidatud kehade süsteemis. Üks vedrude paar paneb keha võnkuma x-telje, teine y-telje sihis. Kui hälbed on väikesed, siis on mõlemad võnkumised eraldi võetuna harmoonilised:

$$\begin{cases} x = A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x) ; \\ y = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y) . \end{cases}$$



Joon. 31

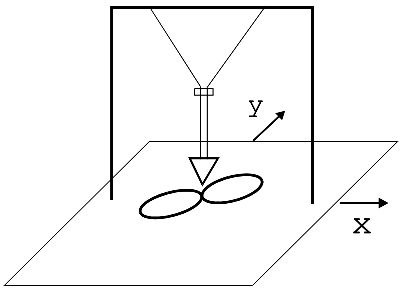
Keha tegelik liikumine on nende liikumiste summa. Üldisel juhul tekivad väga keerulised trajektoorid. Vastavaid kujundeid uuris esimesena prantsuse teadlane Lissajous (1822-1880). Seepärast nimetatakse neid *Lissajous' kujunditeks*.

Vaatleme mõningaid kujundeid katseliselt joonisel 32 kujutatud seadme abil. Ülesriputatud lehter liivaga pannakse võnkuma.

Lehtrist väljavoolav liiv märgistab selle liikumise tee.

Nööride V-kujuline osa saab võnkuda ainult "võllaga" ristuvas sihis, alumine osa aga nii x- kui ka y-telje sihis. Osade pikkuste suhtest oleneb sageduse ω_x ja ω_y suhe. See koos A_x, A_y, φ_x ja φ_y väärtusega määrab trajektoori kuju.

[Katse Lissajous' kujundite saamiseks liiva abil ja elektroonselt ostsillograafi ekraanil.]



Joon. 32

Vaatleme ühte lihtsamat erijuhtu: $\omega_x = \omega_y = \omega$. Leiame x ja y vahelise seose, mis ei sisalda aega. Seda nimetatakse *trajektoori võrrandiks*. Üleval esitatud süsteem määrab samuti trajektoori, kuid nn. parameetrilisel kujul. Parameetriks on aeg.

Kirjutame võrrandsüsteemi ümber järgmiselt:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A_x} = \sin\omega t \cos\varphi_x + \cos\omega t \sin\varphi_x ; \\ \dfrac{y}{A_y} = \sin\omega t \cos\varphi_y + \cos\omega t \sin\varphi_y . \end{cases}$$

Korrutame võrdusi vastavalt $\cos\varphi_y$ ja $\cos\varphi_x$ ning lahutame esimesest teise:

$$\frac{x}{A_x}\cos\varphi_y - \frac{y}{A_y}\cos\varphi_x = \cos\omega t(\sin\varphi_x\cos\varphi_y - \cos\varphi_x\sin\varphi_y) =$$

$$= \cos\omega t \sin(\varphi_x - \varphi_y) .$$

Korrates sama siinustega, saame

$$\frac{x}{A_x}\sin\varphi_y - \frac{y}{A_y}\sin\varphi_x = -\sin\omega t\,(\sin\varphi_x\cos\varphi_y - \cos\varphi_x\sin\varphi_y) =$$

$$= -\sin\omega t\,\sin(\varphi_x - \varphi_y)\ .$$

Tõstame saadud avaldised ruutu ja liidame:

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_x A_y}(\cos\varphi_x\cos\varphi_y + \sin\varphi_y\sin\varphi_x) =$$

$$= \sin^2(\varphi_x - \varphi_y)(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)\ .$$

Nii saime seose x ja y vahel – trajektoori võrrandi:

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_x A_y}\cos(\varphi_x - \varphi_y) = \sin^2(\varphi_x - \varphi_y). \qquad (71)$$

See on üldine *ellipsi* võrrand (Joon. 33). Ellips asub ristkülikus mõõtmetega $2A_x$ x $2A_y$. Selle kuju oleneb faasivahest $\varphi_x - \varphi_y$.

Vaatleme erijuhtusid.

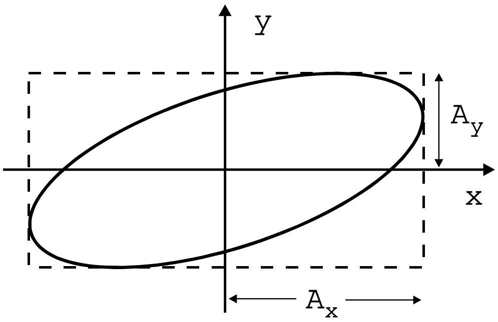
1) Samas faasis liitumine:

$$\varphi_x - \varphi_y = 2n\pi\ ;\ \cos\,(\varphi_x - \varphi_y) = 1\ ;\ \sin(\varphi_x - \varphi_y) = 0.$$

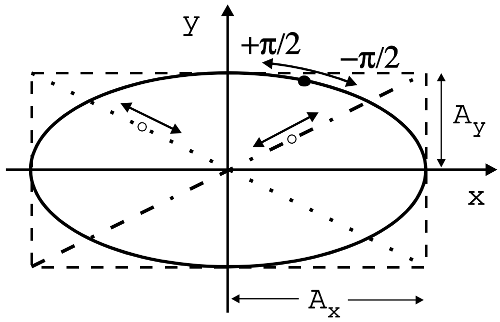
Saame vahe ruudu, mis võrdub nulliga:

$$\left(\frac{x}{A_x} - \frac{y}{A_y}\right)^2 = 0\ \ ;\ \ y = \frac{A_y}{A_x}x\ .$$

See kujutab sirget (Joon. 34, punkt-kriipsjoon).



Joon. 33



Joon. 34

2) Vastasfaasis liitumine:

$$\varphi_x - \varphi_y = (2n+1)\pi \ ; \ \cos(\varphi_x - \varphi_y) = -1 \ ; \ \sin(\varphi_x - \varphi_y) = 0.$$

Saame nulliga võrduva summa ruudu:

$$\left(\frac{x}{A_x} + \frac{y}{A_y}\right)^2 = 0 \quad ; \quad y = -\frac{A_y}{A_x}\,x \ .$$

See on samuti sirge, kuid koordinaattasandi III ja IV veerandit läbiv (Joon.34).

3) $\qquad \varphi_x - \varphi_y = \pm\frac{\pi}{2} \ ; \ \cos(\varphi_x - \varphi_y) = 0 \ ; \ \sin(\varphi_x - \varphi_y) = \pm 1:$

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1 \ .$$

Saime koordinaattelgede suhtes sümmeetriliselt asetseva ellipsi (Joon.34, pidev joon). Positiivse faasivahe puhul ($\varphi_x > \varphi_y$) toimub pöörlemine vastassuunas kellaosuti liikumisega, negatiivse puhul – päripidiselt. Suunda saab määrata alg-võrranditest, andes ajale järjest kasvavaid väärtusi ja jälgides vastavaid x ning y muutusi.

42. Sumbuvad võnkumised

Vaatleme veel kord vedrupendlit joonisel 26. Selle võib ka vertikaalseks pöörata ja võnkuma panna.

[Katse vertikaalse vedrupendliga.]

Erinevalt joonisel 26 vaadeldust tuleb praktikas arvestada ka hõõrdejõu olemasoluga. See on alati suunalt vastupidine keha kiirusega. Katsestendidel sooritatud mõõtmised näitavad, et esimeses lähenduses võib hõõrdejõu võtta võrdeliseks kiirusega:

$$f = -\varrho v = -\varrho \dot{x} \, ,$$

kus ϱ on võrdetegur, nn. *takistustegur*. Sel juhul võime Newtoni II seaduse üles kirjutada nii:

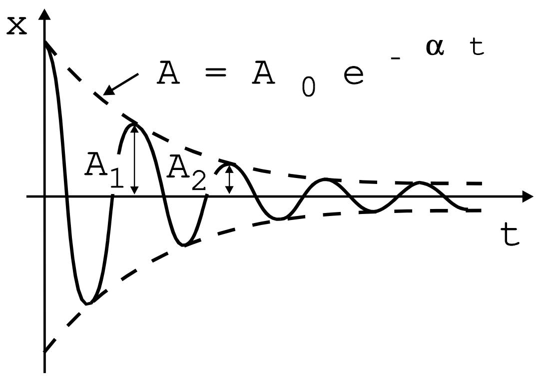
$$m\ddot{x} = F + f = -kx - \varrho\dot{x}$$

ehk

$$\ddot{x} + \frac{\varrho}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \, . \qquad (72)$$

See on *sumbuva võnkumise diferentsiaalvõrrand* . Hõõrde- või takistusjõu tõttu ei toimu võnkumine jääva amplituudiga. Amplituud ja seega ka keha võnkumise energia kahaneb pidevalt (Joon. 35). Mõõtmised näitavad, et amplituudi kahanemine on eksponentsiaalne, s.t. hälve muutub seaduspärasuse järgi

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0) \; . \qquad (73)$$



Joon. 35

Amplituudiks on siinuse ees seisev kordaja (vt. valemit joonisel 35). A_0 on amplituudi väärtus ajahetkel $t = 0$.

Kui suur on eksponendi astendajas olev kordaja α ja millise ringsagedusega ω toimub võnkumine? Vastusteni jõuame, kui nõuame, et (73) oleks diferentsiaalvõrrandi (72) lahendiks. Leiame tuletised:

$$\dot{x} = A_0 e^{-\alpha t}(-\alpha)\sin(\omega t + \varphi_0) + A_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi_0)\cdot \omega \; ;$$

$$\ddot{x} = A_0 e^{-\alpha t}(-\alpha)^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + A_0 e^{-\alpha t}(-\alpha)\cos(\omega t + \varphi_0)\cdot \omega \; +$$

$$+ A_0 e^{-\alpha t}(-\alpha)\omega\cos(\omega t + \varphi_0) + A_0 e^{-\alpha t}\omega(-1)\sin(\omega t + \varphi_0)\cdot \omega \; =$$

$$= A_0 e^{-\alpha t}(\alpha^2 - \omega^2)\sin(\omega t + \varphi_0) - A_0 e^{-\alpha t}\, 2\alpha\omega \, \cos(\omega t + \varphi_0) \; .$$

Asetame need avaldised ja (73) võrrandisse (72) ning võtame ühesugused liikmed kokku:

$$A_0 e^{-\alpha t}\left(\alpha^2 - \omega^2 + \frac{k}{m} - \frac{\alpha\varrho}{m}\right) \sin(\omega t + \varphi_0) -$$

$$- A_0 e^{-\alpha t}\left(2\alpha\omega - \frac{\varrho}{m}\,\omega\right) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0 \; .$$

Võrdus peab kehtima igal ajahetkel (Newtoni II seadus). Ajast olenemata saab avaldis olla null ainult siis, kui siinuse ja koosinuse kordajad on üksteisest sõltumatult võrdsed nulliga:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \omega^2 + \dfrac{k}{m} - \dfrac{\alpha\varrho}{m} = 0 \ ; \\ 2\alpha\omega - \dfrac{\varrho}{m}\,\omega = 0 \ . \end{cases}$$

Teisest võrdusest saamegi tingimuse, mida peab rahuldama α:

$$\alpha = \frac{\varrho}{2m} \ . \tag{74}$$

Arvestame seda ja võrdusest (61) saadavat k/m väärtust esimeses süsteemi võrduses:

$$\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\alpha^2 = 0 \ .$$

Sellest leiame vajaliku tingimuse ω jaoks:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{75}$$

– märgataval sumbumisel keha võngub väiksema nurksagedusega kui on ω_0. Takistusjõud põhjustab sageduse vähenemise. Suurust α nimetatakse *sumbuvuse teguriks*. Selle mõõtühik on 1/sek. Valemist $A = A_0 e^{-\alpha t}$ leiame, et aja $t = 1/\alpha$ puhul on $A = A_0 e^{-1} = A_0/e$. Seega,

> ***sumbuvuse tegur on aja pöördväärtus, mille vältel amplituud kahaneb e = 2,72 korda.***

Tihti kasutatakse α asemel teist suurust sumbuvuse kirjeldamiseks. Selle saame, kui leiame mitu korda amplituud muutub perioodi jooksul (Joon. 35):

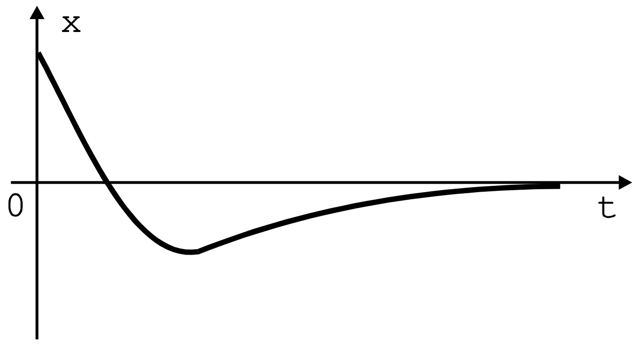
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\alpha t_1}}{A_0 e^{-\alpha(t_1+T)}} = \frac{1}{e^{-\alpha T}} = e^{\alpha T} .$$

Astendajat αT kasutataksegi teise sumbuvust kirjeldava suurusena. Tähistame selle β-ga:

$$\beta = \alpha T = \ln\frac{A_1}{A_2} . \qquad (76)$$

β nimetatakse *sumbuvuse logaritmiliseks dekremendiks*. See näitab

kahe järjestikuse amplituudi (võetud ühe perioodi tagant) suhte naturaal-logaritmi.



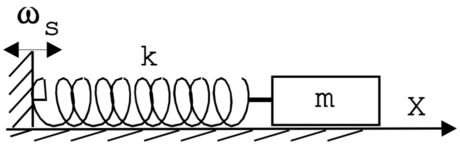
Joon. 36

Mida suurem on β (ja α), seda kiiremini võnkumine kustub. Kui $\alpha > \omega_0$, siis muutub nurksagedus ω (ja periood T) imaginaarseks [vt. valemit (75)]. Võnkumist praktiliselt ei toimu. Algasendist väljaviidud keha läheb aperioodiliselt tagasi tasakaaluasendisse (Joon. 36). Kogu kehale antud energia kulub takistusjõu ületamiseks enne ühegi võnke sooritamist.

43. Sundvõnkumine. Resonants

Kõiki seni vaadeldud võnkumisi nimetatakse vabadeks. Kehade süsteem viidi tasakaalust välja ja jäeti siis omaette, lasti vabaks. Tekkis võnkumine mingi sagedusega υ (või ω). Seda nimetatakse *süsteemi vaba võnkumise sageduseks ehk* *omavõnkesageduseks*. Analoogiliselt on ka $T = 2\pi/\omega$ *omavõnkeperiood*.

Nüüd oletame, et kehade süsteemile mõjub veel välisjõud, mis on perioodiliselt muutuv. Võtame näiteks joonisel 37 skemaatiliselt kirjeldatud juhu. Vedru kinnituspunkti nihutatakse edasi-tagasi nurksagedusega ω_s. Sellest tekib vedru lisadeformatsioon, mistõttu kehale m kandub üle sama sagedusega muutuv lisajõud:



Joon. 37

$$F_s = F_0 \sin(\omega_s t + \varphi_s) \ .$$

F_0 on selle jõu amplituud. Indeks *s* tähistab keha võnkuma sundivat jõudu. Nüüd on Newtoni II seadus üles kirjutatav järgmiselt:

$$m\ddot{x} = F + f + F_s \ .$$

Jõudude asendamisel vastavate avaldistega ja võrduse jagamisel *m*-ga saame:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega_s t + \varphi_s) \ . \qquad (77)$$

Seejuures kasutasime järgmisi tähistusi:

$$\frac{\varrho}{2m} = \alpha \ ; \ \frac{k}{m} = \omega_0^2 \ ; \ \frac{F_0}{m} = a_0 \ .$$

Võrdus (77) on *sundvõnkumise diferentsiaalvõrrand*. Vastab juhule, kus sundiv jõud muutub sinusoidaalselt. Üldjuhul võib jõud muutuda ka muul viisil.

Kuidas keha liikuma hakkab? Kohe pärast jõu mõjumise algust ei ole liikumise kirjeldamine lihtne. Lihtsamaks muutub see siis, kui jõud on mõjunud juba küllalt kaua. Katsed näitavad, et siis keha võngub harmooniliselt sama sagedusega, mis on sundival jõul:

$$x = A\sin(\omega_s t + \varphi_0)\ .$$

Leiame sellise võnkumise amplituudi A ja algfaasi φ_0. Selleks on tarvis võtta tuletised:

$$\dot{x} = A\omega_s\cos(\omega_s t + \varphi_0)\ ;$$

$$\ddot{x} = -A\omega_s^2\sin(\omega_s t + \varphi_0)\ .$$

Asetame need võrrandisse (77) ja teisendame seda:

$$A(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin(\omega_s t + \varphi_0) + 2\alpha\,\omega_s A cos(\omega_s t + \varphi_0) = a_0\sin(\omega_s t + \varphi_s);$$

$$\begin{aligned} &A(\omega_0^2 - \omega_s^2)(\sin\omega_s t\ \cos\varphi_0 + \cos\omega_s t\ \sin\varphi_0) + \\ &\quad + 2\alpha\,\omega_s A(\cos\omega_s t\ \cos\varphi_0 - \sin\omega_s t\ \sin\varphi_0) = \\ &\qquad = a_0(\sin\omega_s t\ \cos\varphi_s + \cos\omega_s t\ \sin\varphi_s). \end{aligned}$$

Võrdus peab kehtima igal ajahetkel. See saab nii olla ainult siis, kui $\cos\omega_s t$ ja $\sin\omega_s t$ kordajad mõlemal pool võrdusmärki on eraldi võrdsed:

$$\begin{cases} A[(\omega_0^2 - \omega_s^2)\cos\varphi_0 - 2\alpha\omega_s\sin\varphi_0] = a_0\cos\varphi_s\ ; \\ A[(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin\varphi_0 + 2\alpha\omega_s\cos\varphi_0] = a_0\sin\varphi_s\ . \end{cases}$$

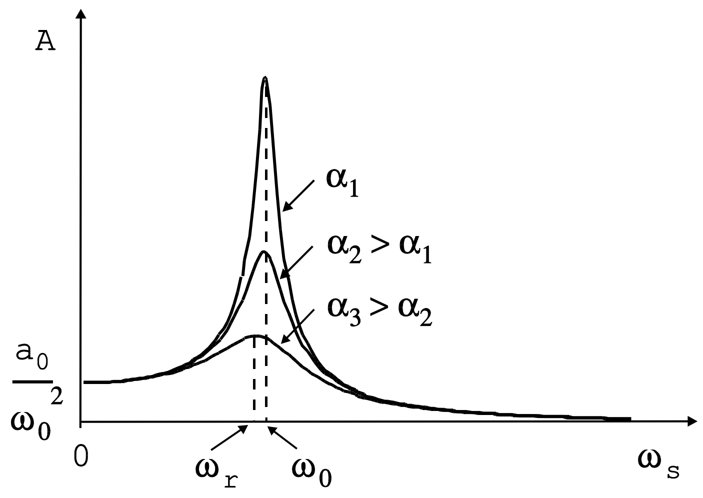
Võrduste ruututõstmisel ja summeerimisel saame valemi A jaoks:

$$A^2[(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\alpha^2\omega_s^2] = a_0^2\ ;$$

Kirjeldame seda seost graafiliselt joonisel 38. Graafikud on joonestatud kolme erineva sumbuvuse teguri arvväärtuse jaoks. Väikese sumbuvuse korral

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\alpha^2\omega_s^2}} \,. \tag{78}$$

amplituud kasvab järsult, kui sundiva jõu sagedus (ω_s) läheneb süsteemi omavõnkesagedusele (ω või ω_0).



Joon. 38

Sellist nähtust nimetatakse *resonantsiks*. Suure sum-- buvuse korral on resonants nõrk (kõver lame) ja *resonantssagedus* (ω_r) erineb märgatavalt omavõnkesagedusest (ω või ω_0). Valemist (78) võib leida amplituudi maksimumväärtusele vastava sageduse Selleks tuleb leida $dA/d\omega_s$ ja võrrutada see nulliga. Nii saadakse valem resonantssageduse jaoks:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \,. \tag{79}$$

On soovitatav teha seda iseseisvalt. Võrrelge ka tulemust (75)-ga.

[Katse vedrupendli resonantsi jälgimiseks eriseadmel.]

44. Sundvõnkumise faas

Sundvõnkumise algfaasi φ_0 leidmiseks jagame eespoolkirjutatud süsteemi võrdused omavahel:

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin\varphi_0 + 2\alpha\omega_s\cos\varphi_0}{(\omega_0^2 - \omega_s^2)\cos\varphi_0 - 2\alpha\omega_s\sin\varphi_0} = \tan\varphi_s .$$

Järgnevalt jagame murru lugejat ja nimetajat $(\omega_0^2 - \omega_s^2)\cos\varphi_0$-ga ja tähistame

$$\tan\varphi = \frac{2\alpha\omega_s}{\omega_0^2 - \omega_s^2} .$$

Siis saame

$$\frac{\tan\varphi_0 + \tan\varphi}{1 - \tan\varphi_0 \tan\varphi} = \tan\varphi_s$$

ehk

$$\tan(\varphi_0 + \varphi) = \tan\varphi_s .$$

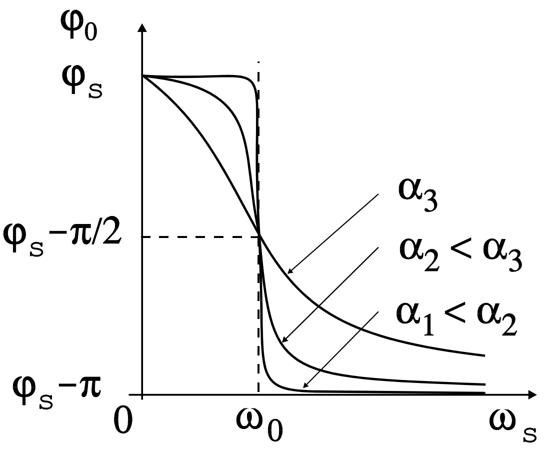
Järelikult,

$$\varphi_0 + \varphi = \varphi_s$$

ehk

$$\varphi_0 = \varphi_s - \varphi = \varphi_s - \arctan\frac{2\alpha\omega_s}{\omega_0^2 - \omega_s^2} . \qquad (80)$$

Kujutame saadud sõltuvusi graafiliselt joonisel 39. Sundvõnkumine (φ_0) jääb alati sundivast jõust (φ_s) faasis maha ($\varphi_0 < \varphi_s$, arctan vahemikus $0 \div \pi$). Resonantsi puhul on mahajäämus peaaegu 90° ehk $\pi/2$ rad. Ringsageduse ω_s edasisel kasvamisel mahajäämus suureneb veelgi, lähenedes π-le, kui $\omega_s >> \omega_0$.



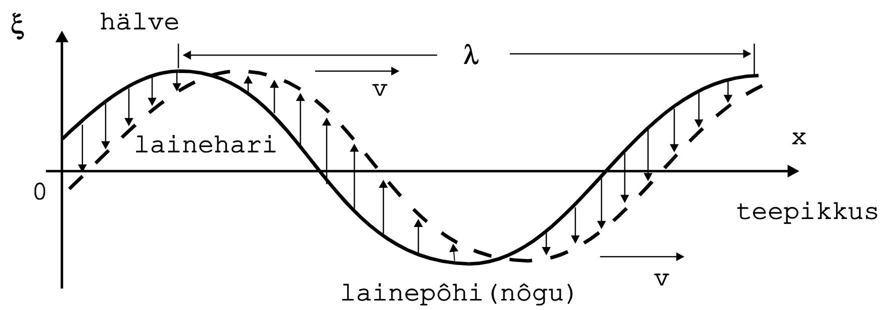
Joon. 39

Seega, resonantsi saavutamiseks on tarvis keha mõjutada jõuga, mis oleks hälbest faasis $\pi/2$ võrra ees. Et ka keha kiirus on hälbest $\pi/2$ võrra ees (vt. punkti 36), siis on resonantsi puhul jõud samas faasis keha kiirusega. Nii saavutabki jõu poolt arendatav võimsus, kiirus kord jõud resonantsi puhul suurima väärtuse ja keha amplituud kasvab märgatavalt isegi siis, kui mõjuv jõud ei ole suur. Kehale kantakse energiat üle kõige intensiivsemalt. ω_0 ja ω_s suure erinevuse puhul energia ülekanne on minimaalne. See läheneb 0-le, kui faasierinevus saab võrdseks π-ga – jõud on hälbega vastasfaasis.

§ 7. Lained

45. Võnkumise levimine keskkonnas. Rist- ja pikilainetus

Igasugune keskkond – tahke, vedel või gaasiline – on mingisugusel määral elastne. Kui selle mõni osake viia välja tasakaaluasendist ja lasta vabaks, siis hakkab osake võnkuma. Tekib sumbuv võnkumine, sest osake on seotud teiste samasuguste osakestega keskkonnas. Osa võnkeenergiast muundub soojuseks, osa kandub üle naaberosakestele. Need hakkavad samuti võnkuma. Nii tekib *võnkumise levimine ruumis*. Seda nähtust nimetataksegi *lainetuseks*. Keskkonna osa, milles võnkumine algselt tekitati, nimetatakse *laineallikaks*. Sõna "lainetus" tuleneb sellest, et seoses võnkumise levimisega on keskkonna osade hetkeline asetus laineline. Kõik keskkonna-osakesed ei võngu samas faasis. Laineallikast kaugemal asetsevatesse punktidesse jõuab võnkumine hiljem. Seal korratakse allika võnkumisi hilinemisega, mahajäämisega faasis, millest tekibki laineline liikumine (Joon. 40). Pidev joon kujutab keskkonnaosakeste hälbeid ühel ja samal ajahetkel.



Joon. 40

Hetk hiljem asuvad osakesed asendites, mis on näidatud punktiirjoonega. Vertikaalsed nooled näitavad osakeste nihkeid esitatud kahe ajamomendi vahel. Tekib laineharjade ja -põhjade liikumine võnkumise levimise suunas. Seejuures ei liigu keskkonnaosakesed selles (x-telje) suunas, vaid näiteks võnkumise levimissuunaga risti. Niisugust lainetust nimetatakse *ristlainetuseks*.

[Katse lainemasinal ja vedeliku pinnal (vannis) tekitatavate lainetega.]

Sama joonis 40 võib kujutada ka teist lainetüüpi, mida nimetatakse *piki-lainetuseks*. Sellisel juhul osakesed võnguvad x-telje sihis, kuid nende hälvet võime ikkagi kujutada ξ-telje abil. See telg ei oma nüüd ruumitelje tähendust, on lihtsalt hälbe telg graafilisel joonisel. Sellises laines osakesed võnguvad laine levimise sihis, kuid lõppkokkuvõttes ei kandu ruumis edasi. Edasi kanduvad osakeste tihendused ja hõrendused, mis tekivad sellest, et kõik osakesed ei võngu ühes ja samas faasis.

[Katse pikilaine tekitamiseks lainemasinal.]

Põhimõtteliselt võib hälbe suund olla ka levimissuuna suhtes kaldu. Sellised lained saavad tekkida siiski ainult erilistes olukordades. Tavaliselt on laine kas piki- või ristlaine, või nende mingi kombinatsioon. Ristlained tekivad vedelate ja tahkete kehade pinnal, varrastes ja keeltes. Pikilainetus on aga nn. ruumlainetus, levides aine sees. Näiteks hääl levib õhus pikilainetusena. Osakeste võnkumise faasierinevusest (mittesünkroonsusest) tekivad õhu hõrendused ja tihendused, mis levivad kiirusega ≈ 340 m/s. Kiirus oleneb keskkonna elastsusest ja tihedusest. Näiteks vees on levimiskiirus ≈ 1400 m/s.

Lainet iseloomustatakse *lainepikkusega* λ (Joon. 40). See on

laine levimise suunas võetud kahe lähima samas faasis võnkuva keskkonnaosakese vaheline kaugus.

Kui laine levib ühe lainepikkuse võrra, siis sooritab iga keskkonnaosake ühe täisvõnke. Selleks kulunud aeg, s.t. võnkeperiood, on ühtlasi ka laine periood (T). Seega,

laine levib ühe lainepikkuse võrra oma perioodi jooksul.

Ühtlaste omadustega keskkonnas toimub levimine jääva kiirusega v. Seepärast võib kasutada ühtlase liikumise valemit s = v·t:

$$\lambda = v\,T\,. \tag{81}$$

T on samal viisil seotud nurksagedusega ω ja sagedusega υ nagu võnkumise puhul:

$$T = \frac{1}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

Kui leviv võnkumine on sinusoidaalne (harmooniline) ja keskkond on homogeenne, siis on ka laine sinusoidaalne (Joon. 40). Paneme tähele, et siin on abstsissteljeks ruumitelg x, mitte aeg, nagu see oli võnkumiste sinusoidi juures (Joon. 25). Sinusoidaalne laine on nii ajas kui ka ruumis sinusoidaalselt muutuv.

46. Sfääriline ja tasapinnaline laine

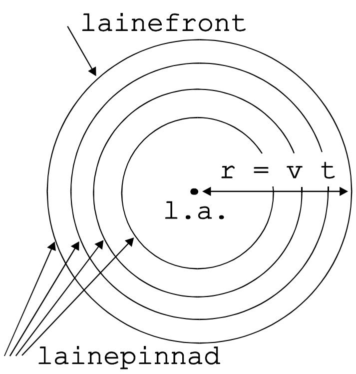
Olgu laineallika võnkumine harmooniline. Siis on selle hälve üles kirjutatav nii:

$$\xi_a = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \ .$$

Levigu see võnkumine homogeenses keskkonnas kiirusega v. Siis jõuab laine kaugusele r laineallikast ajaga r/v. Sellise aja võrra hiljem hakkab seal toimuma sama võnkumine, mis laineallikalgi. Ainult amplituud on teine. Järelikult on hälve kaugusel r üles kirjutatav nii:

$$\xi = A \ \sin[\omega(t - \frac{r}{v}) + \varphi_0] \ .$$

Homogeenses keskkonnas levib võnkumine ühtlaselt kõigis suundades. Seepärast on hälve ühesugune igal sfäärilisel pinnal ümber laineallika (Joon. 41). Neid nimetatakse *lainepindadeks*. Kõige esimest, mis tekkis kohe pärast võnkumise algust laineallikal ja liigub kõige ees, nimetatakse *lainefrondiks* (raadius $r = v\,t$). Seal on faasi väärtus pidevalt φ_0 .



Joon. 41

Kuidas muutub amplituud koos kaugenemisega laineallikast? Võnkumise energia, mis allikast väljub ja ruumis edasi kandub, jaotub järjest suuremale pinnale $S = 4\pi r^2$. Seega kasvab lainefrondil olevate võnkuvate osakeste arv võrdeliselt r^2-ga. Energia, mis tuleb ühe osakese kohta, kahaneb seepärast seaduspärasuse $1/r^2$ järgi. Punktis 38 leidsime, et võnkuva keha energia on võrdeline amplituudi ruuduga. Seepärast võib öelda, et amplituud kahaneb pöördvõrdeliselt kaugusega r:

$$\xi = \frac{A_1}{r} \sin[\omega(t - \frac{r}{v}) + \varphi_0] \ . \tag{82}$$

A_1 on pöördvõrdelise sõltuvuse võrdetegur, mis tähendab amplituudi väärtust ühikulis-el kaugusel (r = 1 m) laineallikast.

Niiviisi saime *sfäärilise laine võrrandi*, mis kehtib juhul, kui ei esine võnkumisenergia kadu levimisel. Tegelikult muundub mehaaniline energia osaliselt soojuseks osakeste vastastikuse hõõrdumise tõttu. Amplituud kahaneb kiiremini, kui näitab valem (82). Kui kiiresti, oleneb kadude suurusest, s.t. keskkonna omadustest (peamiselt elastsusest ja tihedusest). Esimeses lähenduses võib amplituudile kirjutada juurde samasuguse eksponentsiaalse teguri, mis esineb sumbuvate võnkumiste juures.

See nn. *jooksva laine võrrand* (82) kirjutatakse tavaliselt üles *lainearvu* abil:

$$\kappa = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda} \, . \tag{83}$$

S.o.

lainepikkuste arv, mis mahub teepikkusele **2π** ***ühikut*.**

Lainearvu abil saame kirjutada:

$$\xi = \frac{A_1}{r} \sin(\omega t - \kappa r + \varphi_0) \, . \tag{82'}$$

$\kappa r = 2\pi \cdot r/\lambda$ mõõdab mahajäämust faasis, mis tuleneb võnkumise levimisest kaugusele r laineallikast – iga teele mahtuva lainepikkuse kohta 2π rad.

Väga suurel kaugusel laineallikast on lainefront ja -pinnad praktiliselt tasapinnad. Ka amplituud muutub seal väga vähe. Seda võib pidada konstantseks. Seepärast võime laineallikast lõpmata kaugel, mööda x-telge liikuva laine jaoks kirjutada:

$$\xi = A_0 \sin(\omega t - \kappa x + \varphi_0) \, . \tag{84}$$

Seejuures on lainefront ja lainepinnad x-teljega risti asuvad tasandid, mistõttu ka lainet nimetatakse *tasapinnaliseks*. Laine levimissuunaga ristuva tasandi ulatuses on selle kõigis punktides hälve ühesugune, samuti faas ja amplituud ning nende kaudu arvutatavad muud suurused (näiteks energia).

47. Lainete diferentsiaalvõrrand. Superpositsiooniprintsiip

Võrreldes võnkumisega, mis on ajas perioodiline nähtus, on laine perioodiline nii ajas kui ka ruumis, s.t. hälve ξ muutub perioodiliselt nii t kui x muutudes. Periood ajas on $T = 2\pi/\omega$, ruumis aga $\lambda = 2\pi/\kappa$.

Võtame tasalaine avaldisest (84) kahekordse tuletise. Ühel juhul aja, teisel ruumikoordinaadi järgi:

$$t \text{ järgi: } \ddot{\xi} = -\omega^2 \xi ;$$

$$x \text{ järgi: } \xi^{//} = -\kappa^2 \xi .$$

Seega peab kehtima võrdus

$$\frac{1}{\omega^2}\ddot{\xi} = \frac{1}{\kappa^2}\xi^{//}$$

ehk

$$\xi^{//} - \frac{\kappa^2}{\omega^2}\ddot{\xi} = 0 .$$

ω ja κ jagatis on valemi (83) järgi võrdne laine kiirusega v. Seega

$$\xi^{//} - \frac{1}{v^2}\ddot{\xi} = 0 . \qquad (85)$$

See on *lainete diferentsiaalvõrrand*, mida homogeenses keskkonnas leviva laine hälve alati rahuldab. Üldisemal juhul, kui laine ei levi mitte täpselt x telje sihis, saadakse $\xi^{//}$ asemele kõigi koordinaatide järgi võetud teist järku osatuletiste summa:

$$\Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$$

ja diferentsiaalvõrrand omandab kuju

$$\Delta\xi - \frac{1}{v^2}\ddot{\xi} = 0 \,. \tag{85'}$$

Δ on nn. *Laplace operaator*. Antud juhul ei tähista see ξ muutust, nagu varem, vaid osatuletiste leidmist ja vastavaid tehteid nendega.

Võrrand (85') on lineaarne ξ suhtes. See tähendab, et kui on leitud kaks lahendit ξ_1 ja ξ_2, siis lahendiks on ka nende mingi lineaarne kombinatsioon $a\,\xi_1 + b\,\xi_2$. Seda üldistades võib väita, et kui lahenditeks on mingi arv *n* laineid

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \dots\ \xi_n\ ,$$

siis on lahendiks ka nende summa (kordajad *a, b* , ... võib arvata ξ-de sisse)

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n \,.$$

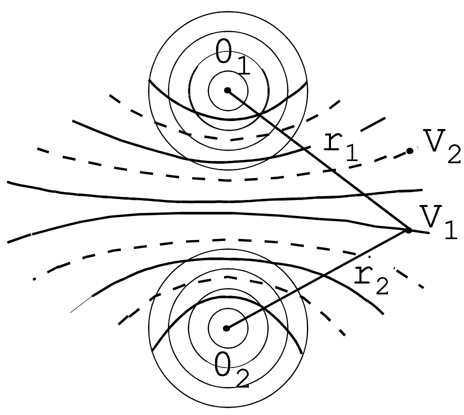
Praktikas tähendab see seda, et valem (85') kehtib ka sinusoidaalsest keerulisemate lainete puhul, nende mingi summa puhul. Ainus piirav tingimus on, et summaarse laine amplituud ei või ületada keskkonna elastsuse piiri. Kui hälve ei ole enam võrdeline seda tekitava jõuga, ei kehti Hooke'i seadus, siis ei saa eespool kirjeldatud diferentsiaalvõrrandit kehtivaks pidada. Sel juhul öeldakse, et ei kehti lainete *superpositsiooniprintsiip* (lihtsa liitumise printsiip). Printsiibi kehtimisel võib igasuguse laine lahutada sinusoidaalseteks laineteks ja vastupidi – moodustada nendest summeerimise teel uusi laineid, mis kõik alluvad samale võrrandile (85'). Füüsikaliselt tähendab selle printsiibi kehtivus veel seda, et lained ei mõjuta üksteist nende levimisel samas ruumiosas. Üks laine võib teisest läbi minna nii, et nad ei tekita teineteises mitte mingisuguseid muutusi. Koosmõju alas lainete hälbed liituvad, tekitades mingi keerulisema lainepildi, kuid teineteisest lahkudes jätkavad nad liikumist nii, nagu ei olekski nende teele teisi laineid sattunud. Selline asjaolu näitab ka sinusoidaalsete lainete suurt tähtsust. Väga paljusid keerulisemaid laineid võib lahutada sinusoidaalseteks ja vastupidi – sinusoidaalsetest võib koostada keerulisemaid laineid.

Superpositsiooniprintsiip kehtib ka väljaspool mehaanikat. Ainult tänu sellele on näiteks võimalik suure hulga raadiosignaalide üksteist mittesegav levimine "eetris".

48. Lainete interferents

Olgu keskkonnas kaks võrdse sagedusega laineallikat (Joon. 42). Eraldi võetuna põhjustavad nad mingis punktis V_1 järgmisi hälbeid:

$$\begin{cases} \xi_1 = A_1 \sin(\omega t - \kappa r_1 + \varphi_{01}) \; ; \\ \xi_2 = A_2 \sin(\omega t - \kappa r_2 + \varphi_{02}) \; . \end{cases}$$



Joon. 42

Olgu hälbed samasihilised (joonise tasandiga risti). Siis saame summaarse hälbe leidmist vaadelda kui samas sihis toimuvate võnkumiste liitmist, mida vaatlesime punktis 39. Seal leidsime, et liitumise tulemus oleneb faasierinevusest. Antud juhul võrdub see avaldisega

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \kappa(r_1 - r_2) + \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

ja see ei olene ajast. Põhjuseks on sageduste võrdsus. Kui mingis punktis V_1 on faasivahe $2n\pi$, siis seal toimub alati võnkumiste maksimaalne tugevnemine. Mingis teises punktis V_2 on vahe $r_1 - r_2$ teistsugust väärtust omav. Kui see annab faasivaheks $(2n+1)\pi$, siis võnkumised kustutavad seal teineteist maksimaalselt. Võnkumine ja seega ka lainetus toimub minimaalse amplituudiga. Ühesugune kustutamine või tugevdamine esineb punktides, milledel vahe $r_1 - r_2$ omab ühte ja sama väärtust. Tingimus $r_1 - r_2 = const$ määrab *hüperbooli* meie joonise tasandil, ruumis aga *hüperboloidse pinna*, mille fookusteks on laineallikad 0_1 ja 0_2. Ühe hüperbooli ulatuses toimub lainetuse tugevnemine (pidev joon), teise ulatuses nõrgenemine (kriips-joon). Seejuures on nähtus ajas püsiv. Tekkinud pilti nimetatakse *interferentspildiks* ja nähtust *interferentsiks*. Lainete maksimaalse tugevnemise kohti nimetatakse *interferentsmaksimumideks*. Seal $A = A_1 + A_2$. Maksimaalse nõrgenemise kohti nimetatakse *interferentsmiinimumideks*. Seal $A = A_1 - A_2$. Kui $A_1 = A_2$, siis on $A = 0$ miinimumides ja $A = 2A_1$ maksimumides. Arvestades seda, et laine energia on võrdeline amplituudi ruuduga, on viimasel juhul energia miinimumides kahanenud 0-ni, maksimumides aga kasvanud 4-kordseks, võrreldes ühe laine energiaga.

Interferents on lainete liitumisel tekkiv püsiv energia ümberpaiknemine ruumis, mis tuleneb lainete vastastikusest üksteise tugevdamisest ühtedes punktides ja nõrgendamisest teistes.

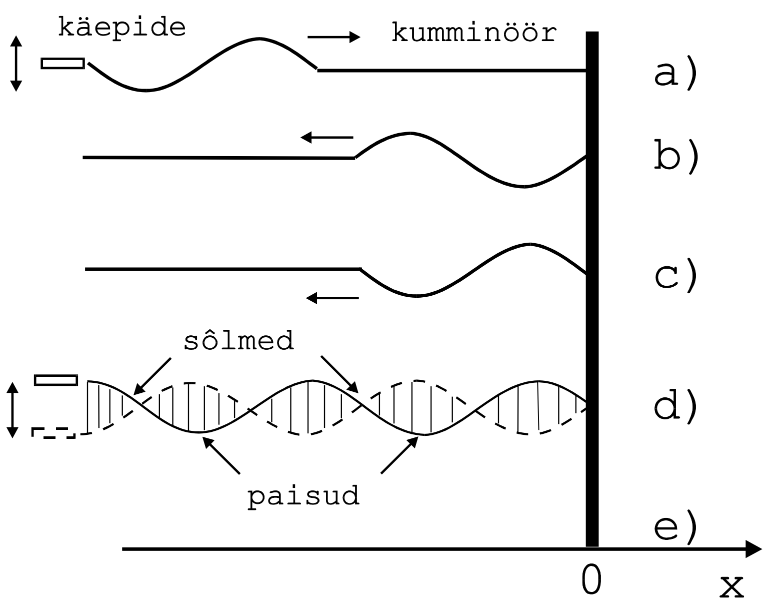
Interferentsiks ei nimetata igat lainete liitumisnähtust. Meelevaldsel liitumisel ei teki maksimum- ja miinimumalasid. Selleks peab faasierinevus olema ajas muutumatu. Ajas muutumatu on see ainult siis, kui lainete nurksagedused on täpselt ühesugused. Ainult siis taanduvad aega sisaldavad liikmed (ωt) faasivahe arvutamisel välja.

Ajas konstantse faasivahega laineid nimetatakse koherentseteks.
Sõna tuleneb vastavast ladinakeelsest sõnast, mis tähendab seostatust, kokkukuuluvust.

Lained on niivõrd üksteisega seotud, et nende faasivahe on ajas konstantne. Kui ühes toimub mingi muutus faasiga, siis samasugune muutus esineb ka teise juures. Ainult *koherentsed lained* (samamoodi nimetatakse ka vastavaid laineallikaid) on suutelised andma interferentsi.

49. Seisvad lained

Siin vaatleme lähemalt kahe sinusoidaalse laine liitumist, mis liiguvad teineteisele vastu. Neid saadakse näiteks laine peegeldumisel mingilt tõkkelt (Joon. 43). Peegeldumisel esineb kaks äärmist juhtu: b ja c. Juhul b faasimuutust ei esine, juhul c võrdub see π-ga. Öeldakse, et faas on muutunud vastupidiseks. Esimene juhtum esineb siis, kui kumminööri ots on päris vaba või seotud mõne temast vähem jäigema pika nööriga toe külge. Peegeldumine toimub siis kumminööri otsalt. Teise juhtumiga on tegemist kumminööri jäigal sidumisel näiteks seina külge.



Joon. 43

Seinale langeva ja sealt peegelduva laine liitumisel tekib nn. *seisev laine* (joonise osa d). Sellel on näha *paisusid ja sõlmi*. Sõlmedes on võnkumine kustunud, sealsed nööriosad seisavad paigal. Paisudes toimub võnkumine maksimaalse amplituudiga. Seejuures ei esine näivat liikumist piki nööri, nagu see on täheldatav jooksvate lainete juures [vt. valemit (82) ja (84)]. Seepärast nimetataksegi sellist lainet seisvaks.

Juhul b on nööri otsa juures pais, juhul c – sõlm. Viimane juhtum ongi kujutatud joonise osal d.

[Katse kumminööriga ja saelehega seisva laine tekitamiseks.]

Olgu x-telje suunas (Joon. 43, e) leviva ehk seinale langeva laine võrrand

$$\xi_l = A \sin(\omega t - \kappa x + \varphi_0) .$$

Peegelduv laine liigub x-telje negatiivses suunas. Sellele vastava võrrandi saame, kui teeme asenduse $x \to -x$. Oletame ka, et peegeldumisel laine amplituud ei muutu, faas aga muutub π võrra (juht c). Siis saame peegelduva laine hälbe jaoks kirjutada

$$\xi_p = A \sin(\omega t + \kappa x + \varphi_0 + \pi) .$$

Hälvete summa annab seisva laine hälbe:

$$\xi = \xi_p + \xi_l = A[\sin(\omega t + \kappa x + \varphi_0 + \pi) + \sin(\omega t - \kappa x + \varphi_0)] .$$

Kasutame trigonomeetria valemit

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} .$$

Saame

$$\xi = 2 A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) \cos(\kappa x + \pi/2) = -2 A \sin\kappa x \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2).$$

Amplituud (viimase siinuse ees olev kordaja) muutub sinusoidaalselt teepikkusega x. Sõlmed tekivad kohtades, kus

$\sin\kappa x = 0$, s.t. $\kappa x = 2n\, \pi/2$; $n = 0,\pm1,\pm2, ...$ (86)

paisud aga seal, kus

$$\sin\kappa x = \pm 1, \text{ s.t. } \kappa x = (2n+1)\pi/2 \,. \tag{87}$$

Seega (86) on antud juhul interferentsmiinimumi ja (87) – interferentsmaksimumi tingimuseks. Esimesel pilgul näib seisva laine faas olevat konstantne, s.t. koordinaadist x mitteolenev. Kõik punktid justkui võnguksid sünkroonselt. Seepärast ei tekigi lainelist liikumist ei vasakule ega paremale. Tegelikult on faas konstantne ainult naabersõlmede vahelises alas. $\sin\kappa x$, s.t. amplituud muudab märki sõlmest üleminekul. Negatiivset amplituudi tavaliselt ei kasutata. Olemasolev "-" märk kantakse üle faasi:

$$-\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) = \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2 + \pi) \,.$$

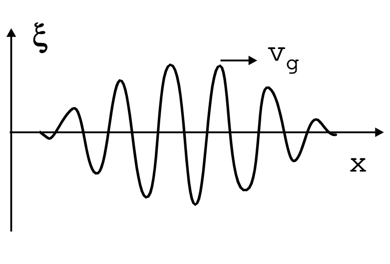
Seega muutub faas sõlmest üleminekul vastupidiseks. Naabervahes toimuvad võnkumised vastasfaasis.

[Katse seisva laine jälgimiseks lainemasinal.]

Seisva laine paisude või sõlmede vahekauguste mõõtmisega saab määrata κ või ω, v või λ. Nende kaudu võib leida mitmeid keskkonda iseloomustavaid suurusi. Seisvate lainete rakendusala on väga lai. Eriti suur tähtsus on neil akustikas. Ka igas muusikariistas tekib seisva laine seisund, kui see heliseb.

50. Lainepakett. Faasi- ja grupikiirus

Seni käsitlesime lõpmatu ulatusega laineid. Sellised tekivad pidevalt kiirgava laineallika puhul. Praktikas on kiirgusprotsess alati lõpliku kestvusega. Tekivad alguse ja lõpuga lained (Joon. 44).



Joon. 44

Sellise laine sagedus ei ole kogu laine ulatuses konstantne. Lainet ei saa iseloomustada ühe täpse sagedusega. Kuid teda võib vaadelda koosnevana teatud hulgast sinusoidaalsetest lainetest erinevate amplituudide, sageduste ja algfaasidega. See asjaolu vastab superpositsiooniprintsiibile. Peaaegu alati on võimalik leida sellist ideaalsete lainete summat, mis interferentsi tulemusena annaks reaalse laine. Niisugune lainete grupp kannabki *lainepaketi* nime. Sinusoidaalne on ideaalne laine. Reaalset saab kirjeldada nende paketina.

Tavaliselt levivad eri sagedusega lained keskkonnas erineva kiirusega. Niisugust nähtust nimetatakse *dispersiooniks*. Seepärast on ka lainepaketti kuuluvatel lainetel igaühel üldiselt isesugune kiirus. S.t., et üldjuhul on kiirus mingi funktsioon sagedusest: $v = f(\omega)$. See kiirus on nn. *faasikiirus*, sest määrab samafaasiväärtuse edasikandumise kiiruse. Kontrollime seda. Võtame mingi faasi väärtuse

$$\omega t - \kappa x + \varphi_0 = const$$

ja nõuame, et see ajas ei muutuks. Siis peab selle tuletis aja järgi olema 0:

$$\omega - \kappa \frac{dx}{dt} = 0 \; ; \; \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} = v \; .$$

Saime tõepoolest valemiga (83) määratud laine kiiruse. Seega punkt laines, mis omab ühte ja sama faasi väärtust, liigub kiirusega *v*.

Oletame nüüd, et $\omega / \kappa = v$ oleneb sagedusest. Missuguse kiirusega liigub siis lainepakett – summaarne laine? Selle liikumist võime määrata mingi ühe koha või punkti põhjal paketis. Näiteks koha järgi, kus amplituud on maksimaalne. Maksimum-koht tekib seal, kus kõigil osalainetel on alati ühesugune faas. See annab tingimuse, et faas ei oleneks sagedusest. Seome eelmise kiiruse määramise tingimuse veel selle uue tingimusega. Võtame faasist ka tuletise sageduse järgi ja nõuame, et see jääks ikkagi võrdseks nulliga:

$$1 - \frac{d\kappa}{d\omega} \frac{dx}{dt} = 0 \; .$$

Koordinaadi x tuletis annab nüüd mõlemat esitatud tingimust rahuldava punkti liikumise kiiruse. See ongi paketi liikumise kiirus:

$$v_g = \frac{1}{\frac{d\kappa}{d\omega}} = \frac{d\omega}{d\kappa}\,. \tag{88}$$

Seda nimetatakse laine *grupikiiruseks*.

Kui $\kappa = \omega/v$ [valem (83)] ja faasikiirus v ei olene sagedusest ω, siis $d\kappa/d\omega = 1/v$ ja $v_g = v$. S.t. kui dispersioon puudub, siis grupikiirus on võrdne faasikiirusega. Kõik lained paketis liiguvad ühesuguse kiirusega, mistõttu ka kogu grupp liigub sama kiirusega.

Grupi- ja faasikiiruse erinevust võib ette kujutada järgmiselt. Joonisel 44 esitatud lainejada (pakett) liigub kiirusega v_g. Kui faasikiirus v on keskmiselt võttes sellest suurem, siis liiguvad laine põhjad ja harjad paketi sees paketist kiiremini. Laineharju ja -põhjasid justkui tekib paketi tagumises otsas juurde ja esiotsas nad kaovad. Võib olla ka vastupidi, et faasikiirus on väiksem grupikiirusest. Siis liigub pakett laine harjadest-põhjadest kiiremini. Laine harju ja -põhjasid tekib paketi esiotsas juurde ja tagumises nad kaovad. Kõik oleneb sellest, kas v kahaneb või kasvab sageduse kasvades.

[Katse ostsillograafi ekraanil 2 liituva sageduse abil lainepaketi modelleerimise ja grupi- ning faasikiiruse erinevuse jälgimise kohta.]

Grupikiirus annab ka laine energia edasikandumise kiiruse. Näiteks valguse grupikiirus on see, mis ei saa ületada väärtust c. Faasikiirus võib sellest ka suurem olla. Grupp on reaalne laine, sinusoidaalne aga ideaalne, mille kiirus (faasikiirus) võib olla meelevaldne. Täpselt sinusoidaalne laine energiat ei kanna. Sellseid tegelikkuses ei esine.