

# Tallinna Tehnikaülikool

## Füüsikainstituut

Üliõpilane: Meelis Saluvee

Teostatud: 8. oktoober 1999

Õpperühm: LAP 13

Kaitstud:

Töö nr: 6

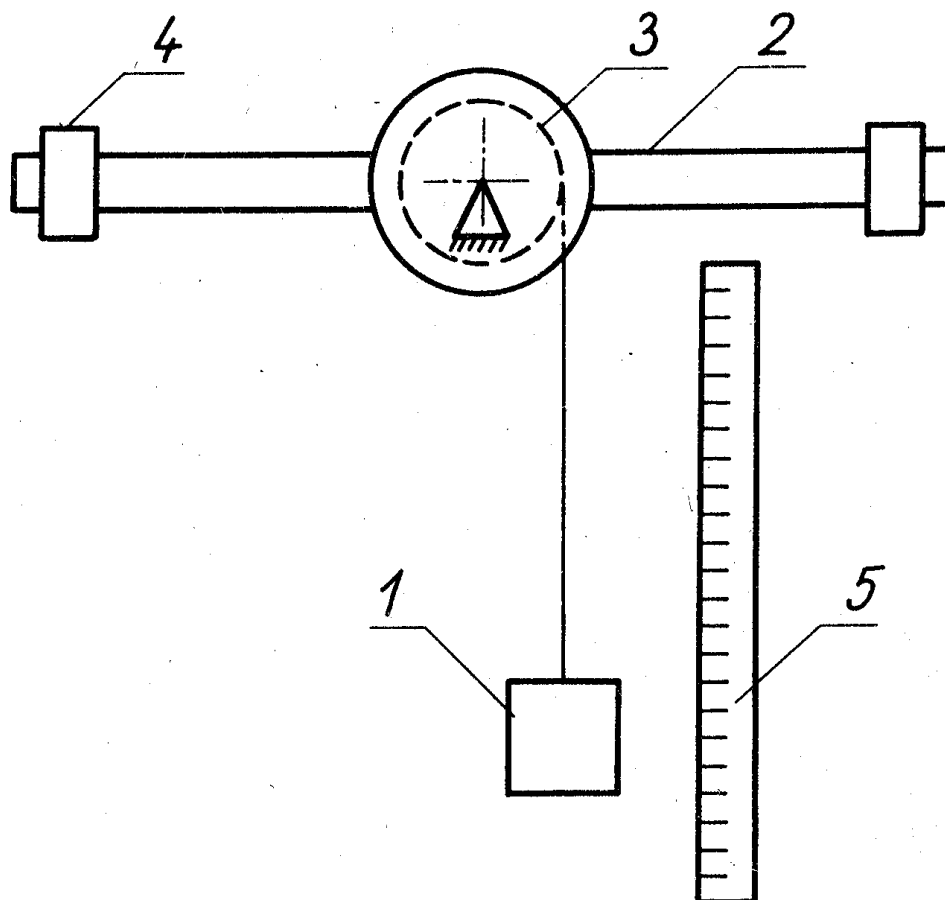
OT allkiri:

## PÖÖRDLIIKUMINE

Töö eesmärk: Pöördliikumise  
dünaamika põhiseaduse kontrollimine.

Töövahendid: Katseseade,  
raskuste komplekt.

### Skeem



## Katseandmete tabel

Pöördliikumise dünaamika põhiseaduse kontroll.

$D = \dots \pm \dots$  cm,  $n_0 = \dots \pm \dots$  cm,  $n_1 = \dots \pm \dots$  cm.

Katse nr.	Mass m, kg	Langemise aeg t, s					
		$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$\bar{t}$
1.							
2.							
3.							
4.							

Katse nr.	Mass m, kg	Skaala näit $n_2$ , cm					
		$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{23}$	$n_{24}$	$n_{25}$	$\bar{n}_2$
1.							
2.							
3.							
4.							

$h = n_0 - n_1 = \dots - \dots = \dots$  cm.

$h_{11} = n_0 - \bar{n}_{21} = \dots - \dots = \dots$  cm.

$h_{12} = n_0 - \bar{n}_{22} = \dots - \dots = \dots$  cm.

$h_{13} = n_0 - \bar{n}_{23} = \dots - \dots = \dots$  cm.

$h_{14} = n_0 - \bar{n}_{24} = \dots - \dots = \dots$  cm.

## Arvutused ja veaarvutused

Kuna kasutatud koormiste lubatud põhiviga on 0.03 g, mis on suurusjärgu võrra täpsem kui koormiste endi massid, võib selle vea arvestamata jätta. Samuti võib mitte arvestada võlli diameetri viga.

### Mõõdetud aja vea arvutamine

$$t_{3,0.95} = 3.2$$

$$1. \sum_{i=1}^4 (t_i - \bar{t})^2 = 1.6760 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\Delta t_1 = t_{n-1, \beta} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n \cdot (n-1)}} = 3.2 \cdot \sqrt{\frac{1.6760 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3}} = 0.037818 \text{ s}$$

$$2. \sum_{i=1}^4 (t_i - \bar{t})^2 = 0.021900 \text{ s}$$

$$\Delta t_2 = t_{n-1, \beta} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n \cdot (n-1)}} = 3.2 \cdot \sqrt{\frac{0.021900}{4 \cdot 3}} = 0.13670 \text{ s}$$

$$3. \sum_{i=1}^4 (t_i - \bar{t})^2 = 1.1000 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\Delta t_3 = t_{n-1, \beta} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n \cdot (n-1)}} = 3.2 \cdot \sqrt{\frac{1.1000 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3}} = 0.030638 \text{ s}$$

$$4. \sum_{i=1}^4 (t_i - \bar{t})^2 = 4.6000 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\Delta t_4 = t_{n-1, \beta} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n \cdot (n-1)}} = 3.2 \cdot \sqrt{\frac{4.6000 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3}} = 0.062652 \text{ s}$$

### Langemiskõrguse $h_1$ vea arvutamine

$$1. \sum_{i=1}^4 (h_i - \bar{h})^2 = 8.760 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta h_1 = t_{n-1, \beta} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}{n \cdot (n-1)}} = 3.2 \cdot \sqrt{\frac{8.760 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 3}} = 2.734 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$2. \sum_{i=1}^4 (h_i - \bar{h})^2 = 6.200 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta h_2 = t_{n-1, \beta} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}{n \cdot (n-1)}} = 3.2 \cdot \sqrt{\frac{6.200 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3}} = 7.274 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$3. \sum_{i=1}^4 (h_i - \bar{h})^2 = 2.276 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta h_3 = t_{n-1, \beta} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}{n \cdot (n-1)}} = 3.2 \cdot \sqrt{\frac{2.276 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3}} = 4.407 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$4. \sum_{i=1}^4 (h_i - \bar{h})^2 = 1.700 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta h_4 = t_{n-1, \beta} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}{n \cdot (n-1)}} = 3.2 \cdot \sqrt{\frac{1.700 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3}} = 3.809 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

### Jõumomentide arvutamine

$$M = m \cdot D \cdot \left( \frac{g \cdot h_1}{h + h_1} - \frac{h}{t^2} \right)$$

$$D = 0.04000 \text{ m}$$

$$g = 9.818 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$h = 1.035 \text{ m}$$

1. ühe koormise korral

$$m_1 = 0.1037 \text{ kg}$$

$$t_1 = 13.733 \text{ s}$$

$$h_{11} = 0.8832 \text{ m}$$

$$M_1 = 0.1037 \cdot 0.04000 \cdot \left( \frac{9.818 \cdot 0.8832}{1.035 + 0.8832} - \frac{1.035}{13.733^2} \right) = 0.01326 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. kahe koormise korral

$$m_2 = 0.1475 \text{ kg}$$

$$t_2 = 11.575 \text{ s}$$

$$h_{12} = 0.9110 \text{ m}$$

$$M_2 = 0.1475 \cdot 0.04000 \cdot \left( \frac{9.818 \cdot 0.9110}{1.035 + 0.9110} - \frac{1.035}{11.575^2} \right) = 0.01939 \text{ N} \cdot \text{m}$$

3. kolme koormise korral

$$m_3 = 0.1914 \text{ kg}$$

$$t_3 = 10.225 \text{ s}$$

$$h_{13} = 0.9262 \text{ m}$$

$$M_3 = 0.1914 \cdot 0.04000 \cdot \left( \frac{9.818 \cdot 0.9262}{1.035 + 0.9262} - \frac{1.035}{10.225^2} \right) = 0.02560 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4. nelja koormise korral

$$m_4 = 0.2349 \text{ kg}$$

$$t_4 = 9.2200 \text{ s}$$

$$h_{14} = 0.9365 \text{ m}$$

$$M_4 = 0.2349 \cdot 0.04000 \cdot \left( \frac{9.818 \cdot 0.9365}{1.035 + 0.9365} - \frac{1.035}{9.2200^2} \right) = 0.03165 \text{ N} \cdot \text{m}$$

### **Jõumomentide vigade arvutamine**

$$M = m \cdot D \cdot \left( \frac{g \cdot h_1}{h + h_1} - \frac{h}{t^2} \right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial h_1} = m \cdot D \cdot \left( \frac{g \cdot (h + h_1) - g \cdot h_1}{(h + h_1)^2} - 0 \right) = m \cdot D \cdot \left( \frac{g \cdot (h + h_1 - h_1)}{(h + h_1)^2} \right) = \frac{m \cdot D \cdot g \cdot h}{(h + h_1)^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = m \cdot D \cdot \left( \frac{2h}{t^3} \right) = \frac{2 \cdot m \cdot D \cdot h}{t^3}$$

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial h_1} \cdot \Delta h_1\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial t} \cdot \Delta t\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2 \cdot D^2 \cdot g^2 \cdot h^2}{(h+h_1)^4} \cdot (\Delta h_1)^2 + \frac{4 \cdot m^2 \cdot D^2 \cdot h^2}{t^6} \cdot (\Delta t)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{0.1652 \cdot m^2}{(1.035 + h_1)^4} \cdot (\Delta h_1)^2 + \frac{6.856 \cdot 10^{-3} \cdot m^2}{t^6} \cdot (\Delta t)^2}$$

1.  $m_1 = 0.1037 \text{ kg}$   
 $h_{11} = 0.8832 \text{ m}$   
 $\Delta h_{11} = 0.002734 \text{ m}$   
 $t_1 = 13.733 \text{ s}$   
 $\Delta t_1 = 0.037818 \text{ s}$

$$\Delta M_1 = \sqrt{\frac{0.1652 \cdot m_1^2}{(1.035 + h_{11})^4} \cdot (\Delta h_{11})^2 + \frac{6.856 \cdot 10^{-3} \cdot m_1^2}{t_1^6} \cdot (\Delta t_1)^2} = 3.132 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$$

2.  $m_2 = 0.1475 \text{ kg}$   
 $h_{12} = 0.9110 \text{ m}$   
 $\Delta h_{12} = 0.007274 \text{ m}$   
 $t_2 = 11.575 \text{ s}$   
 $\Delta t_2 = 0.13670 \text{ s}$

$$\Delta M_2 = \sqrt{\frac{0.1652 \cdot m_2^2}{(1.035 + h_{12})^4} \cdot (\Delta h_{12})^2 + \frac{6.856 \cdot 10^{-3} \cdot m_2^2}{t_2^6} \cdot (\Delta t_2)^2} = 1.152 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$$

3.  $m_3 = 0.1914 \text{ kg}$   
 $h_{13} = 0.9262 \text{ m}$   
 $\Delta h_{13} = 0.004407 \text{ m}$   
 $t_3 = 10.225 \text{ s}$   
 $\Delta t_3 = 0.030638 \text{ s}$

$$\Delta M_3 = \sqrt{\frac{0.1652 \cdot m_3^2}{(1.035 + h_{13})^4} \cdot (\Delta h_{13})^2 + \frac{6.856 \cdot 10^{-3} \cdot m_3^2}{t_3^6} \cdot (\Delta t_3)^2} = 8.914 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.  $m_4 = 0.2349 \text{ kg}$   
 $h_{14} = 0.9365 \text{ m}$   
 $\Delta h_{14} = 0.003809 \text{ m}$   
 $t_4 = 9.2200 \text{ s}$   
 $\Delta t_4 = 0.062652 \text{ s}$

$$\Delta M_4 = \sqrt{\frac{0.1652 \cdot m_4^2}{(1.035 + h_{14})^4} \cdot (\Delta h_{14})^2 + \frac{6.856 \cdot 10^{-3} \cdot m_4^2}{t_4^6} \cdot (\Delta t_4)^2} = 9.358 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$$

### Nurkkiirenduste arvutamine

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot h}{D \cdot t^2}$$

$$h = 1.035 \text{ m}$$

$$D = 0.04000 \text{ m}$$

$$1. \quad t_1 = 13.733 \text{ s}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{4 \cdot h}{D \cdot t_1^2} = 0.5488 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$2. \quad t_2 = 11.575 \text{ s}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{4 \cdot h}{D \cdot t_2^2} = 0.7725 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$3. \quad t_3 = 10.225 \text{ s}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{4 \cdot h}{D \cdot t_3^2} = 0.9900 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$4. \quad t_4 = 9.2200 \text{ s}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{4 \cdot h}{D \cdot t_4^2} = 1.218 \frac{1}{\text{s}^2}$$

### Nurkkiirenduste vigade arvutamine

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot h}{D \cdot t^2}$$

Kuna D ja h on loetud konstantideks, saame

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{t}$$

$$1. \quad \Delta t_1 = 0.037818 \text{ s}$$

$$\Delta \varepsilon_1 = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta t_1}{t_1} = 1.4142 \cdot 0.5488 \cdot \frac{0.037818}{13.733} = 0.002137 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$2. \quad \Delta t_2 = 0.13670 \text{ s}$$

$$\Delta \varepsilon_2 = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta t_2}{t_2} = 1.4142 \cdot 0.7725 \cdot \frac{0.13670}{11.575} = 0.01290 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$3. \quad \Delta t_3 = 0.030638 \text{ s}$$

$$\Delta \varepsilon_3 = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_3 \cdot \frac{\Delta t_3}{t_3} = 1.4142 \cdot 0.9900 \cdot \frac{0.030638}{10.225} = 0.004195 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$4. \quad \Delta t_4 = 0.062652 \text{ s}$$

$$\Delta \varepsilon_4 = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_4 \cdot \frac{\Delta t_4}{t_4} = 1.4142 \cdot 1.218 \cdot \frac{0.062652}{9.2200} = 0.01170 \frac{1}{\text{s}^2}$$

### **Suhteliste vigade arvutamine**

$M_1 = (0.01326 \pm 0.00003) \text{ Nm}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta M_1}{M_1} \cdot 100 \% = \frac{0.00003}{0.01326} \cdot 100 \% = 0.23 \%$$

$M_2 = (0.01939 \pm 0.00012) \text{ Nm}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta M_2}{M_2} \cdot 100 \% = \frac{0.00012}{0.01939} \cdot 100 \% = 0.62 \%$$

$M_3 = (0.02560 \pm 0.00009) \text{ Nm}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta M_3}{M_3} \cdot 100 \% = \frac{0.00009}{0.02560} \cdot 100 \% = 0.35 \%$$

$M_4 = (0.03165 \pm 0.00009) \text{ Nm}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta M_4}{M_4} \cdot 100 \% = \frac{0.00009}{0.03165} \cdot 100 \% = 0.28 \%$$



$$\varepsilon_1 = (0.5488 \pm 0.0021) \frac{1}{s^2}, \text{ usutavusega } 0.95.$$

$$\delta = \frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cdot 100 \% = \frac{0.0021}{0.5488} \cdot 100 \% = 0.38 \%$$

$$\varepsilon_2 = (0.7725 \pm 0.0129) \frac{1}{s^2}, \text{ usutavusega } 0.95.$$

$$\delta = \frac{\Delta\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cdot 100 \% = \frac{0.0129}{0.7725} \cdot 100 \% = 1.67 \%$$

$$\varepsilon_3 = (0.9900 \pm 0.0042) \frac{1}{s^2}, \text{ usutavusega } 0.95.$$

$$\delta = \frac{\Delta\varepsilon_3}{\varepsilon_3} \cdot 100 \% = \frac{0.0042}{0.9900} \cdot 100 \% = 0.42 \%$$

$$\varepsilon_4 = (1.218 \pm 0.012) \frac{1}{s^2}, \text{ usutavusega } 0.95.$$

$$\delta = \frac{\Delta\varepsilon_4}{\varepsilon_4} \cdot 100 \% = \frac{0.012}{1.218} \cdot 100 \% = 0.99 \%$$

## **Jõumomendi sõltuvus nurkkiirendusest**

### Inertsimomendi ja tema vea arvutamine

$$I = \frac{M_B - M_A}{\varepsilon_B - \varepsilon_A} = \frac{0.0230 - 0.0147}{0.90 - 0.60} = 2.77 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Esimese eksperimentaalse punkti kõrvalekalle lähendusjoonest on 0.

$$\Delta M_A = 3.132 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Kolmanda eksperimentaalse punkti kõrvalekalle lähendusjoonest on  $1.7 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$ .

Sama punkti süstemaatiline viga on  $1.9 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$ . Seega

$$\Delta M_B = \sqrt{(1.7 \cdot 10^{-4})^2 + (1.9 \cdot 10^{-5})^2} = 1.7 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta I = \frac{\sqrt{(\Delta M_B)^2 + (\Delta M_A)^2}}{\varepsilon_B - \varepsilon_A} = \frac{\sqrt{(3.132 \cdot 10^{-5})^2 + (1.7 \cdot 10^{-4})^2}}{0.90 - 0.60} = 5.8 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$I = (0.028 \pm 0.001) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100 \% = \frac{0.0006}{0.0277} \cdot 100 \% = 2.17 \%$$

# Järeldus

## Arvutuste tulemused:

$M_1 = (0.01326 \pm 0.00003) \text{ Nm}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta M_1}{M_1} \cdot 100 \% = \frac{0.00003}{0.01326} \cdot 100 \% = 0.23 \%$$

$M_2 = (0.01939 \pm 0.00012) \text{ Nm}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta M_2}{M_2} \cdot 100 \% = \frac{0.00012}{0.01939} \cdot 100 \% = 0.62 \%$$

$M_3 = (0.02560 \pm 0.00009) \text{ Nm}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta M_3}{M_3} \cdot 100 \% = \frac{0.00009}{0.02560} \cdot 100 \% = 0.35 \%$$

$M_4 = (0.03165 \pm 0.00009) \text{ Nm}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta M_4}{M_4} \cdot 100 \% = \frac{0.00009}{0.03165} \cdot 100 \% = 0.28 \%$$

$\varepsilon_1 = (0.5488 \pm 0.0021) \frac{1}{\text{s}^2}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cdot 100 \% = \frac{0.0021}{0.5488} \cdot 100 \% = 0.38 \%$$

$\varepsilon_2 = (0.7725 \pm 0.0129) \frac{1}{\text{s}^2}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cdot 100 \% = \frac{0.0129}{0.7725} \cdot 100 \% = 1.67 \%$$

$\varepsilon_3 = (0.9900 \pm 0.0042) \frac{1}{\text{s}^2}$ , usutavusega 0.95.

$$\delta = \frac{\Delta \varepsilon_3}{\varepsilon_3} \cdot 100 \% = \frac{0.0042}{0.9900} \cdot 100 \% = 0.42 \%$$

$$\varepsilon_4 = (1.218 \pm 0.012) \frac{1}{s^2}, \text{ usutavusega } 0.95.$$

$$\delta = \frac{\Delta\varepsilon_4}{\varepsilon_4} \cdot 100 \% = \frac{0.012}{1.218} \cdot 100 \% = 0.99 \%$$

$$I = (0.028 \pm 0.001) \text{ kg m}^2, \text{ usutavusega } 0.95.$$

$$\delta = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100 \% = \frac{0.0006}{0.0277} \cdot 100 \% = 2.17 \%$$

### **Järeldus.**

Kuna katsed olid teostatud suure täpsusega, on vead mõne protsendi piirides. Graafikult on näha, et inertsimoment oli käesolevas katses konstantne. Katsetulemused kinnitasid pöördliikumise dünaamika põhiseaduse kehtivust. Kasutatud meetoodika sobib selle seaduse kontrolliks.

## Spikker

1. Jõumoment on suurus, mis iseloomustab keha(de süsteemi)le mõjuvaid jõude ja millest sõltub keha pöörlemise muutus.
2. Jõumomendi suund on määratav vektorite  $\mathbf{r}$  (punktist O jõu rakenduspunkti tõmmatud vektor) ja  $\mathbf{f}$  (rakendatav jõud) vektorkorrutise reegli järgi.
3. **Võrdse suurusega ja vastassuunalised jõud on ekvivalentsed.**
4. Jõupaari moodustavad kaks suuruselt võrdset ning suunalt vastupidist jõudu, kuid mille mõjusirged ei ühti.
5. Ainepunkti inertsimoment on tema massi ja pöörlemisraadiuse ruudu korrutis. Keha inertsimoment on selle keha kõigi ainepunktide inertsimomentide summa
6. **Igal kehal on 3 vastastikku risti asetsevat ning keha inertsikeset läbivat telge. (inertsit peateljed). Üldjuhul on keha inertsimomendid peatelgede suhtes erinevad. Kui keha pöörleb tingimustes, kus puuduvad välismõjud, siis osutub püsivaks ainult pöörlemine peatelgede ümber, kus inertsimoment on kas min või max. Pöörlemine ümber telje, mille suhtes inertsimomendil on mingi vahepealne väärtus, on ebapüsiv. Seega, inertsimoment oleneb sellest, kuidas pöörlemistelg on seotud peatelgedega.**
7. Inertsimoment on võrdeline jõumomendiga ja pöördvõrdeline nurkkiirendusega.
- 8.

Kulgliikumine	Pöördliikumine
$m\mathbf{w} = \mathbf{f}$	$I_z \cdot \beta = \mathbf{M}_z$
$\mathbf{p} = m\mathbf{w}$	$L_z = I_z \omega$
$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{f}$	$dL/dt = \mathbf{M}$
$\mathbf{f}$ – jõud	$\mathbf{M}$ või $\mathbf{M}_z$ – jõumoment
$m$ – mass	$I_z$ – inertsimoment
$\mathbf{v}$ – joonkiirus	$\omega$ – nurkkiirus
$\mathbf{w}$ – joonkiirendus	$\beta$ – nurkkiirendus
$\mathbf{p}$ – impulss	$L$ – impulsimoment

9. Keha vaba telg on pöörlemistelg, mille asend ruumis säilib, ilma et talle peaksid mõjuma mingid välisjõud.

### 10. Jah.